Differenciálegyenletek

A fizikai folyamatok nagy része matematikailag differenciálegyenletek segítségével írható le. Egyszerűbb esetekben (folyadék áramlása, radioaktív bomlás, anyagi pont mozgása stb.) a differenciálegyenletek egyszerű integrálással megoldhatók. Ebben a fejezetben valamivel továbbmegyünk: megismertetjük az olvasót néhány általános fogalommal, és megvizsgáljuk a differenciálegyenletek egy-két viszonylag könnyen megoldható osztályát. A differenciálegyenletek további tulajdonságait a következő fejezetben tárgyaljuk.

Ha a differenciálegyenlet csak egyetlen független változót tartalmaz, *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük. Ha a független változók száma egynél több, akkor megjelennek a differenciálegyenletben a további változók szerinti parciális deriváltak is. Ilyen esetben *parciális differenciálegyenletről* beszélünk.

Ebben és a következő fejezetben csak közönséges differenciálegyenletekről lesz szó. Vizsgálatainkhoz felhasználjuk a 6.1.2. pont eredményeit és az Euler-féle összefüggést (5.3. pont).

7.1. AZ ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET GEOMETRIAI ÉRTELMEZÉSE

Elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük az

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

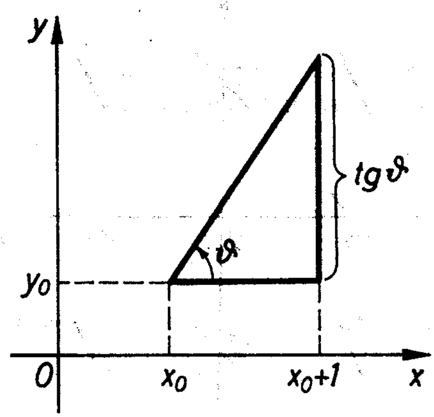
alakú összefüggést, ahol y valamilyen függvénye x-nek. A továbbiakban ennek az egyenletnek is csak az ún. explicit alakját tárgyaljuk, vagyis feltételezzük, hogy y x szerinti deriváltja az egyenletből kifejezhető:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (1)$$

Ennek a felírási módnak az az előnye, hogy $y(x)$ grafikusan is előállítható az (1) egyenlet geometriai értelmezése segítségével, anélkül, hogy az $y(x)$ megoldást analitikusan, képlet formájában meghatároznánk. Ismerkedjünk meg először ezzel a geometriai eljárással.

Emlékezzünk vissza a $\frac{dy}{dx}$ derivált geometriai jelentésére. Ha adva van a síkban egy

$y = y(x)$ görbe, akkor ennek bármely pontjában a $\frac{dy}{dx}$ derivált értéke egyenlő a görbéhez ebben a pontban húzott érintő iránytangensével. Ha tehát ismerjük a $\frac{dy}{dx}$ derivált függését az x, y változóktól [lásd az (1) összefüggést], a sík bármely pontjában meghatározhatjuk az (1) megoldását képező görbék érintőinek irányát. A differenciálegyenlet tetszőleges megoldásának grafikonját az adott egyenlet *integrálgörbéjének* nevezzük.



79. ábra

Az érintő irányát grafikusan úgy szemléltethetjük, hogy az adott (x, y) ponton keresztülfektetünk egy kis szakaszt, melynek hajlásszöge kielégíti a

$$\operatorname{tg} \vartheta = f(x, y)^*$$

összefüggést.

Például a

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

kifejezést átírhatjuk a következő alakra:

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Készítsünk táblázatot:

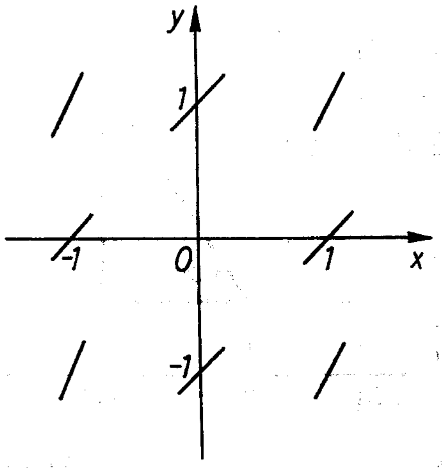
x	y	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta$	x	y	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta$
−1	−1	2	0	1	1
−1	0	1	1	−1	2
−1	1	2	1	0	1
0	−1	1	1	1	2
0	0	0			

A táblázatban 9 pont szerepel; a 80. ábrán mindegyik ponthoz megrajzoltuk a rajtuk át fektetett érintőt. Ha az ábrán növeljük a pontok számát, szemünk láttára rajzolódik ki a

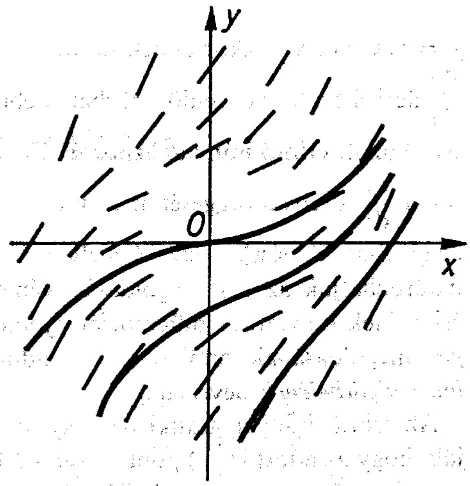
* Szerkesztési feladatokban felesleges a ϑ szöget explicit módon meghatározni és úgy felmérni. Elég az adott pontból felmérni az x-tengely irányában egy 1 hosszúságú, az y-tengely irányában pedig egy

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta$$

nagyságú szakaszt (79. ábra); a szakaszok végpontját összekötve megkapjuk a kívánt meredekségű egyenest.



80. ábra



81. ábra

differenciálegyenletet kielégítő görbesereg. (Lásd a 81. ábrát, ahol felrajzoltuk a

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

differenciálegyenletnek megfelelő irányokat.)

Minden differenciálegyenletnek végtelen sok integrálgörbéje van, de a sík minden $(x_0; y_0)$ pontján csak pontosan egy ilyen görbe megy keresztül. Az (1) egyenlet megoldásai közül ki tudunk választani egy meghatározott, *partikuláris* (azaz konkrét) megoldást, ha még egy kiegészítő feltételt is megadunk:

$$\text{valamely} \quad x = x_0 \quad \text{pontban legyen} \quad y = y_0. \tag{2}$$

Ezt a feltételt *kezdeti feltételnek* nevezik. Az elnevezést az indokolja, hogy ha a független változó az idő, akkor a (2) feltétel a kezdeti időpontban rögzíti a keresett függvény értékét.

Bár a (2) kezdeti feltételben két paraméter szerepel (x_0 és y_0), a partikuláris megoldás kiválasztásának valójában csak egyetlen szabadsági foka van. Az $(x_0; y_0)$ pont ugyanis az általa meghatározott integrálgörbe mentén szabadon mozoghat, ettől maga az integrálgörbe nem változik. Az integrálgörbe kiválasztásánál tehát nem játszik szerepet a görbe menti elmozdulás, s mivel ennek szabadsági foka egy, a kiválasztás szabadsági foka $2-1=1$ lesz. Hasonló meggondolással határoztuk meg a lényeges paraméterek számát a 4.8. pontban. De esetünkben vajon melyik a kettő közül a lényeges paraméter?

Rögzítsük az x_0 értéket, és húzzuk meg az $x = x_0$ merőlegest. A különböző integrálgörbék más-más magasságban metszik ezt az egyenest. A különböző görbék tehát az $y(x_0) = y_0$ értékben különböznek egymástól. A következő eljárással könnyen meghatározhatjuk sok pontban az érintők irányát. Rajzoljuk fel először az (1) alapján az $f(x, y) = C$ görbét a C állandó néhány értékére. Egy ilyen görbe mentén a $\operatorname{tg} \vartheta$ mennyiség állandó: minden pontban C. Az érintők irányát mutató szakaszok tehát az $f(x, y) = C$ görbe pontjaiban mind párhuzamosak egymással.*

* Ne feledjük, hogy nem az $f(x, y) = C$ görbe érintőiről, hanem a $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ egyenlet *integrálgörbéinek* érintőiről van szó!

Az $f(x, y) = C$ görbéket *izoklínáknak* nevezzük. Ezek közül *nulla izoklína* az $f(x, y) = 0$ egyenletű görbe. Az (1) egyenlet integrálgörbéinek érintői ennek az izoklínának minden pontjában párhuzamosak az x-tengellyel. Azt az izoklínát, melynek pontjaiban az érintők mind merőlegesek az x-tengelyre, *végtelen izoklínának* nevezzük. Például a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x-y-1}$$

egyenlet végtelen izoklínája az $x-y = 1$ egyenes.

A 81. ábráról leolvashatjuk, hogy az integrálgörbék nem metszhetik egymást 0-tól különböző szögben. Valóban, (1) alapján egy adott (x, y) értékpárhoz a $\frac{dy}{dx}$ mennyiség csak egy meghatározott értéke tartozik, így ezen a ponton adott szögben csak *egyetlen* görbe mehet át. Behatóbb vizsgálattal megmutatható, hogy az integrálgörbék még csak nem is érintkeznek – feltéve, hogy az adott pontban az (1) egyenlet jobb oldala és y szerinti parciális deriváltja véges. A (2) feltétel tehát valóban egyértelműen meghatározza az (1) egyenlet valamely partikuláris megoldását.

GYAKORLATOK

1. Határozzuk meg a

$$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2$$

differenciálegyenlet izoklínáit.

2. Hol helyezkednek el az (1) általános differenciálegyenlet integrálgörbéinek inflexiós pontjai? Mi lesz e pontok mértani helyének egyenlete? Határozzuk meg az inflexiós pontok egyenletét a

$$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2$$

differenciálegyenlet integrálgörbéi esetében.

7.2. KVADRATÚRÁVAL (KÖZVETLEN INTEGRÁLÁSSAL) MEGOLDHATÓ ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Vegyük sorra a differenciálegyenletek néhány típusát, ahol a megoldások könnyen előállíthatók.

a) *Szétválasztható változójú differenciálegyenletek*

Azokat az egyenleteket nevezzük így, amelyekre

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\cdot\psi(x).\,* \tag{3}$$

* Ilyen alakú egyenletekkel találkozunk például a radioaktív bomlás esetében, vagy az olyan feladatokban, ahol valamilyen folyadéknak egy edényből történő kifolyását vizsgáljuk.

Ebben az egyenletben a jobb oldal két olyan függvény szorzata, melyek egyike csak y-tól, a másik csak x-től függ.

Írjuk át az egyenletet

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = \psi(x)\,dx$$

alakba. Ez utóbbi egyenlőség jobb és bal oldalának integrálját véve:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int \psi(x)\,dx + C \tag{4}$$

(elég egyetlen tetszőlegesen megválasztható állandót kiírnunk, mivel a két integrálnál adódó állandók összevonhatók). A (3) egyenletnek ez az általános megoldása; C értékeit rögzítve kapjuk a partikuláris megoldásokat. Látjuk, hogy az (1) egyenlet általános megoldásában egy tetszőleges állandó szerepel, ez a tény összhangban van a partikuláris megoldás kiválasztásában megengedett egy szabadsági fokkal (lásd 1. pont).

Ha ismerjük a (2) kezdeti feltételt, C könnyen meghatározható. Jelentse

$$\Phi(y) = \Psi(x) + C$$

a (4) formulát. Behelyettesítve az $x = x_0$, $y = y_0$ értékeket a

$$\Phi(y_0) = \Psi(x_0) + C$$

kifejezéshez jutunk, ahonnan

$$C = \Phi(y_0) - \Psi(x_0).$$

Ennek alapján

$$\Phi(y) = \Psi(x) + \Phi(y_0) - \Psi(x_0),$$

azaz

$$\Phi(y) - \Phi(y_0) = \Psi(x) - \Psi(x_0).$$

A kapott partikuláris megoldás felírható az

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$$

alakban is. Közvetlenül meggyőződhetünk arról, hogy ez a megoldás kielégíti a (2) feltételt. Az integrálást elvégezve megkapjuk a keresett megoldást.

b) *Homogén lineáris differenciálegyenletek*

A

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y \tag{5}$$

egyenletet elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. Bár ez csak a (3) differenciálegyenlet speciális esete, rendkívüli fontossága miatt külön is foglalkozunk vele.

Ha az (5)-ben szétválasztjuk az egyes változókat és integrálunk, a

$$\frac{dy}{y} = f(x)\,dx, \quad \ln y = \int_a^x f(x)\,dx + \ln C$$

összefüggést kapjuk. (A jobb oldalon az integrálási állandót csak azért írtuk ln C alakban, hogy a végső megoldás alakja szebb legyen.) Ebből y-ra azt kapjuk, hogy

$$y = Ce^{\int_a^x f(x)\,dx}, \tag{6}$$

ahol a az x-nek valamilyen rögzített értéke. A (6) formula az (5) egyenlet általános megoldását adja.

Egyszerűség kedvéért vezessük be az

$$y_1(x) = e^{\int_a^x f(x)\,dx} \tag{7}$$

jelölést, a (6) kifejezésben C értékét 1-nek választva. Mivel (7) az (5) egyenletnek egy partikuláris megoldása, az általános megoldás

$$y = Cy_1(x) \tag{8}$$

alakban írható fel.

Közvetlenül meggyőződhetünk róla, hogy ha $y_1(x)$ az (5) egyenletnek egy partikuláris megoldása, akkor *tetszőleges C állandóval a (8) függvény is kielégíti az (5) egyenletet*, hiszen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(Cy_1)}{dx} = C\frac{dy_1}{dx} = Cf(x)y_1 = f(x)y.$$

Az (5) egyenlet általános megoldását tehát úgy állíthatjuk elő, hogy vesszük valamilyen partikuláris megoldását, és ezt egy tetszőleges állandóval megszorozzuk. A $C = 0$ értéket behelyettesítve látjuk, hogy az azonosan nulla függvény az (5) egyenletnek egyik partikuláris megoldása. Ez a triviális megoldás természetesen nem alkalmas az általános megoldás megszerkesztésére.

c) *Inhomogén lineáris differenciálegyenletek*

A

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)^{*} \tag{9}$$

alakú egyenleteket elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük. A (9) egyenlet azon megoldását keressük, amely bizonyos $x = x_0$ érték esetén nullával

* Ilyen egyenlettel találkozhatunk például radioaktív anyagok bomlásának vizsgálatánál. Itt az x független változó az idő, az y függvény pedig az adott radioaktív anyagnak a vizsgált rendszerben található mennyisége. A keresett $y(x)$ megoldás tehát e mennyiség időben való változását írja le. Az $f(x)$ koefficiens itt egy olyan negatív állandó, melynek abszolút értéke annak valószínűségét fejezi ki, hogy a vizsgált anyag egységnyi idő alatt elbomlik. A $g(x)$ szabad tag a vizsgált anyagnak a rendszerbe való beáramlási sebességével egyenlő.

egyenlő. Az $f(x)$ függvény rögzítése esetén ezt az $y(x)$ megoldást a $g(x)$ függvény kiválasztása már egyértelműen meghatározza. A $g(x)$ függvény úgy is értelmezhető, mint valamilyen külső hatás, $y(x)$ pedig mint a hatás eredménye. [Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a $g(x) \to y(x)$ hozzárendeléssel egy operátort értelmezünk; lásd: a 6.2. pontot.] Könnyű belátni, hogy az inhomogén lineáris differenciálegyenletekre érvényes a *szuperpozíció elve.* Az adott esetben ez azt jelenti, hogy ha a $g(x)$ függvények összeadódnak, a megfelelő megoldások is összeadódnak. Nos, valóban, ha

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x)y_1 + g_1(x) \quad \text{és} \quad \frac{dy_2}{dx} = f(x)y_2 + g_2(x),$$

ahol $y_1(x_0) = 0$ és $y_2(x_0) = 0$, akkor az

$$y = y_1(x) + y_2(x)$$

függvény kielégíti a

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + [g_1(x) + g_2(x)]$$

egyenletet és az $y(x_0) = 0$ feltételt (miért?).

A 6.2. pont eredményei alapján az $y(x)$ megoldás a hatás eredményét kifejező Green-függvény segítségével állítható elő, mely a

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + \delta(x-\xi) \tag{10}$$

egyenlet megoldását adja tetszőlegesen rögzített ξ-re. Tegyük fel, hogy $\xi > x_0$. Ekkor $x_0 < x < \xi$ esetén a (10) az (5) egyenletbe megy át, aminek (8) volt az általános megoldása. Mivel most azt a megoldást keressük, melyre $y(x_0) = 0$, ezért $C = 0$, ami csak akkor teljesül, ha

$$y(x) \equiv 0.$$

Nos, integráljuk a (10) egyenletet $x = \xi - 0$-tól $x = \xi + 0$-ig. Azt kapjuk, hogy

$$y(\xi+0) - y(\xi-0) = \int_{\xi-0}^{\xi+0} f(x)y\,dx + \int_{\xi-0}^{\xi+0} \delta(x-\xi)\,dx = 0 + 1 = 1.$$

[Az y megoldás véges, ezért a (10) első összeadandójának végtelenül kis szakaszon vett integrálja végtelenül kicsi, tehát elhanyagolható mennyiség.] Az imént bizonyítottak alapján $y(\xi - 0) = 0$, így

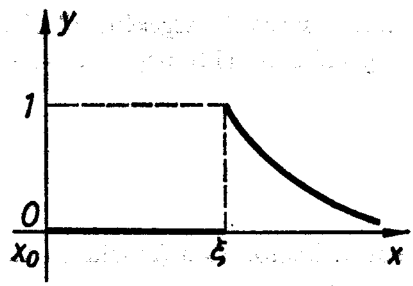
$$y(\xi + 0) = 1. \tag{11}$$

Mi történik akkor, ha $x > \xi$? A (10) egyenlet ilyenkor is (5)-be megy át, aminek a megoldását a (8) szolgáltatja. A (11) feltétel miatt azonban most

$$1 = Cy_1(\xi), \quad \text{azaz} \quad C = \frac{1}{y_1(\xi)}$$

és

$$y = \frac{1}{y_1(\xi)} y_1(x).$$



82. ábra

Esetünkben tehát a Green-függvény alakja:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_0 < x < \xi), \\ \dfrac{y_1(x)}{y_1(\xi)} & (x > \xi). \end{cases}$$

A 82. ábrán mutatjuk be a $G(x; \xi)$ függvény grafikonját rögzített ξ-re. Láthatjuk, hogy a függvénynek az $x = \xi$ pontban szakadása van.

Most már felírhatjuk a (9) egyenlet megoldását tetszőleges $g(x)$ függvényre a megfelelő módon átalakított általános formula alapján (lásd 6.8. pont):

$$y(x) = \int_{x_0}^{\infty} G(x; \xi) g(\xi) \, d\xi = \int_{x_0}^{x} G(x; \xi) g(\xi) \, d\xi +$$

$$+ \int_{x}^{\infty} G(x; \xi) g(\xi) \, d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} g(\xi) \, d\xi, \tag{12}$$

ahol $y_1(x)$ a (7) formulával megadott függvény. Hasonló módon igazolható, hogy ugyanez a végső (12) formula akkor is érvényben marad, ha $x < x_0$. Megjegyezzük, hogy a jobb oldalon $y_1(x)$ kivihető az integráljel elé [$y_1(\xi)$ azonban nem!].

Különösen jól használható ez a formula arra a fizikailag is igen gyakori esetre, amikor $x_0 = -\infty$. Ilyenkor a (12) megoldásnak megvan az a jó tulajdonsága, hogy ha a $g(x)$ függvény azonosan nulla valamilyen x értékig bezárólag, ugyaneddig az x-ig a megoldás is nulla. A (12) összefüggés tehát bizonyos értelemben a $g(x)$ függvény „tiszta" hatását írja le ezekben az esetekben.

A (12) formula a (9) egyenletnek egy olyan partikuláris megoldását szolgáltatja, amely az $x = x_0$ helyen nullával egyenlő. Állítsuk most elő a (9) egyenlet általános megoldását. Megjegyezzük, hogy két tetszőleges megoldás különbsége kielégíti a megfelelő (5) homogén egyenletet; ha ugyanis

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x) y_1 + g(x) \quad \text{és} \quad \frac{dy_2}{dx} = f(x) y_2 + g(x),$$

akkor

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = f(x)(y_1 - y_2)$$

(miért?). Látjuk, hogy a különbség olyan alakra hozható, mint a (8)-cal megadott függvény, ahol C tetszőleges. Végeredményben tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása egy partikuláris megoldásának és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának összegeként áll elő. Ha egy ilyen partikuláris megoldásnak az általunk meghatározott (12) megoldást vesszük, akkor a (9) egyenlet általános megoldása

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} g(\xi)\,d\xi + Cy_1(x) \tag{13}$$

alakba írható. Ha a (2) feltételt kielégítő partikuláris megoldást keressük, akkor (13)-ban $(x = x_0)$-t véve

$$y_0 = 0 + Cy_1(x_0), \quad \text{azaz} \quad C = \frac{y_0}{y_1(x_0)},$$

ahonnan a megoldásra végül is az

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} g(\xi)\,d\xi + y_0 \frac{y_1(x)}{y_1(x_0)}$$

összefüggés adódik.

Ugyanehhez a megoldáshoz más úton is eljuthatunk, egy gyorsabb, de kevésbé természetes módszer, az *„állandó variálásának módszere"* segítségével. *Lagrange*-nak, a kiváló francia matematikusnak és fizikusnak az ötlete volt, hogy a (8) formulából kiindulva a (9) egyenlet megoldását az

$$y = u(x)\,y_1(x) \tag{14}$$

alakban kereshetjük, ahol $u(x)$ ismeretlen függvény, $y_1(x)$-ről azonban tudjuk, hogy teljesül rá a (7) összefüggés. Helyettesítsük be (14)-et (9)-be:

$$uy_1' + u'y_1 = f(x)uy_1 + g(x).$$

Mivel $y_1(x)$ a homogén egyenletnek megoldása, ezért a jobb és a bal oldal első tagja egyenlő egymással, és így

$$u'y_1(x) = g(x).$$

Ennek alapján

$$u' = \frac{g(x)}{y_1(x)},$$

ebből pedig

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{g(\xi)}{y_1(\xi)}\,d\xi + C.$$

(Az utóbbi integrálban az integrálási változót ξ-vel jelöltük, hogy megkülönböztessük az integrálás felső határától.) A kapott függvényt (14)-be visszahelyettesítjük, és újra a (13) formulához jutunk.

d) *A lineáris differenciálegyenletek legegyszerűbb esetei*

Bizonyos esetekben a lineáris differenciálegyenlet megoldása különösen egyszerű. Ilyen egyszerű eset például, ha az $f(x)$ együtthatófüggvény konstans:

$$f(x) \equiv p = \text{const.}$$

Ebben az esetben az (5) egyenlet alakja

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = py.$$

Az általános megoldás ilyenkor a (7) és (8) formulából könnyen levezethető:

$$y = Ce^{px} \tag{15}$$

(egyszerűség kedvéért a-t nullának választva). De eljuthatunk ehhez az eredményhez például a változók szétválasztásának módszerével vagy egyszerű behelyettesítéssel is.

A megfelelő inhomogén egyenlet megoldása különösen egyszerű, ha a $g(x)$ szabad tag konstans vagy exponenciális függvény.

Nézzük először a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = py+A \qquad (A = \text{const}) \tag{16}$$

egyenletet. Az általános megoldáshoz egy partikuláris megoldásra van szükségünk; ezt kell hozzáadnunk a megfelelő homogén egyenlet (15) általános megoldásához. A (16) egyenlet egy ilyen partikuláris megoldásának vehető az

$$y = B = \text{const}$$

függvény; B értéke meghatározható y-nak (16)-ba való visszahelyettesítésével:

$$0 = pB+A, \quad \text{azaz} \quad B = -\frac{A}{p}.$$

A (16) egyenlet általános megoldása tehát a következő alakú:

$$y = -\frac{A}{p}+Ce^{px}.$$

Tekintsük most a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = py+Ae^{kx} \tag{17}$$

egyenletet. Egy exponenciális függvény deriváltja egyenesen arányos magával a függvénnyel, ezért célszerű a (17) egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y = Be^{kx} \tag{18}$$

alakban keresni. Ekkor a (17)-be való visszahelyettesítéskor minden tag ugyanolyan alakú lesz, így B értéke könnyen meghatározható. Hajtsuk végre a helyettesítést:

$$Bke^{kx} = pBe^{kx}+Ae^{kx},$$

ebből B-re a

$$B = \frac{A}{k-p}$$

érték adódik. (18)-ba behelyettesítve (17)-nek egy partikuláris megoldásához jutunk, hozzáadva a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását, (17) általános megoldásaként tetszőleges C konstanssal az

$$y = \frac{A}{k-p}e^{kx}+Ce^{px}$$

függvényt kapjuk.

Ez a kifejezés nyilván nem ad megoldást akkor, ha $k = p$. Ebben a speciális esetben (17) megoldását a (13) általános formula segítségével határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy a homogén egyenlet egy partikuláris megoldásaként választhatjuk az

$$y_1(x) = e^{px}$$

függvényt. Egyszerűség kedvéért x_0-t 0-nak véve azt kapjuk, hogy

$$y = \int_0^x \frac{e^{px}}{e^{p\xi}}Ae^{p\xi}\,d\xi+Ce^{px} = Ae^{px}\int_0^x d\xi+Ce^{px} = Axe^{px}+Ce^{px}. \tag{19}$$

Amikor tehát $k = p$, a partikuláris megoldásnál az exponenciális tag együtthatójában egy x szorzó is megjelenik.

A

$$\frac{dy}{dx} = py+g(x)$$

általános inhomogén egyenlet a Green-függvény segítségével oldható meg. A Green-függvény alakja ebben az esetben különösen egyszerű:

$$G(x;\xi) = \begin{cases} 0 & (x_0 < x < \xi) \\ \dfrac{e^{px}}{e^{p\xi}} = e^{p(x-\xi)} & (x > \xi). \end{cases}$$

A (13) formula alapján az általános megoldás:

$$y = \int_{x_0}^{x} e^{p(x-\xi)}g(\xi)\,d\xi+Ce^{px}.$$

Felsorolásunk távolról sem teljes. A vizsgált típusokon kívül más differenciálegyenlet-típusok is vannak, ahol a megoldás elemi függvényekkel és integráljaikkal explicit formában felírható. Az érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk a gazdag szakirodalmat.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket az adott kezdeti feltételek mellett:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 1.$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$

3. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}, \quad y(0) = 1.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -y+e^{x}, \quad y(1) = \dfrac{1}{e}.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -2y+4x, \quad y(0) = -2.$

7. $\dfrac{dy}{dx}+y = \cos x, \quad y(0) = \dfrac{3}{2}.$

7.3. MÁSODRENDŰ ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓJÚ HOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Másodrendűek azok a differenciálegyenletek, amelyek az ismeretlen függvény másodrendű deriváltjait is tartalmazzák (de ennél magasabb rendű deriváltjait nem). Általános alakjuk tehát a következő:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Ha ez az egyenlet az ismeretlen függvényre és deriváltjaira vonatkozóan lineáris, akkor *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük (az egyenlet x-től való függése akármilyen lehet!). Az általános másodrendű lineáris differenciálegyenlet tehát

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2}+b(x)\frac{dy}{dx}+c(x)y = f(x)$$

alakú.

A továbbiakban ennek az egyenletnek csak azt a leginkább használatos, speciális alakját vizsgáljuk, amelyben az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak együtthatófüggvényei mind konstansok, $a(x) = a$, $b(x) = b$, $c(x) = c$.

Ilyen egyenletekkel különösen gyakran találkozhatunk a mechanikai és elektromos rezgések vizsgálatakor. A független változó szerepét ilyenkor a t idő tölti be. Példaképpen vizsgáljuk meg a legegyszerűbb oszcillátor mechanikai rezgésének esetét. Ekkor a differenciál-