BME
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
GÉPÉSZETI INFORMATIKA TANSZÉK

GRÄFF JÓZSEF

Laplace transzformáció

KÉZIRAT

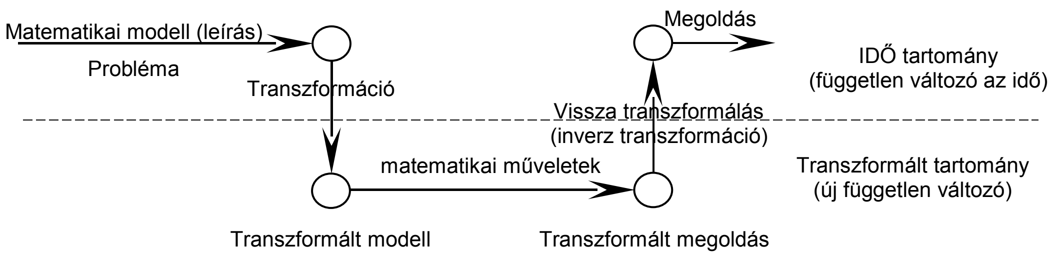
BUDAPEST, 2006

1 Bevezetés

Ez az összeállítás a BME Gépészmérnöki karán a Rendszertechnika (BMEGERI2054, BMEGERI30XX) című tárgyat felvett hallgatók számára készült, és a témakörnek csak azon területeivel foglalkozik, amelyek a Rendszertechnika tárgy keretein belül felhasználásra kerülnek. Célja, hogy a más tárgyakból szerzett ismereteket összefoglalja.

A rendszeranalízis egyik alapfeladata az átmeneti folyamatok vizsgálata, amely alapvetően differenciálegyenletek, illetve egyenletrendszerek megoldásain nyugszik. E feladat egyszerűsítésének egyik lehetősége (mivel korábban nem álltak rendelkezésre számítógépek!), ha a kiindulást képező matematikai modellt **célszerű** transzformációnak vetjük alá és a feladatmegoldást a transzformált tartományban végezzük el, majd visszatérünk az eredeti – esetünkben idő – tartományba.

Ábrázolva:



A rendszertechnikában alkalmazott legfontosabb transzformációk:

- Fourier transzformáció
- Laplace transzformáció

2 A FOURIER[1]-transzformáció

Adott valamely $f(t)$ időfüggvény, amelyről feltételezzük, hogy abszolút integrálható, azaz eleget tesz az alábbi konvergencia feltételnek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < K \text{ , ahol } K \text{ elegendően nagy szám} \tag{1}$$

tehát integrálja korlátos.

Ez esetben az $f(t)$ időfüggvény definíció szerinti FOURIER transzformációja:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt , \tag{2}$$

illetve a transzformáció általánosan alkalmazott jelöléseivel:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \tag{3}$$

Minthogy a (2) transzformációs összefüggés a Fourier-integrálból származik, ez esetben a transzformált tartományban a független változó az ω körfrekvencia, $F(\omega)$ pedig komplex függvény.

Ha adott valamely $F(\omega)$ transzformált függvény, a hozzá tartozó $f(t)$ időfüggvény az alábbi inverz transzformációs összefüggéssel határozható meg:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\,d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \tag{4}$$

A rendszertechnikai gyakorlatban előforduló fontos vizsgáló jelfüggvényekre ($1(t)$, $t\cdot 1(t)$, $e^{\alpha t}$ stb.) nem teljesül az (1) alatti feltétel, ezért általában a Laplace-transzformációt alkalmazzuk.

---

[1]Francia matematikus 1768-1830. (Fourier - sor, - analízis)

3 A LAPLACE-transzformáció

LAPLACE (francia matematikus, 1749-1827) javaslata alapján a függvények konvergenciára kényszeríthetők, ha azokat a $t \to \infty$ esetén erősen nullához tartó $e^{-\sigma t}$ függvénnyel szorozzuk, és vizsgálatunkat csupán $t \geq 0$ időtartományra terjesztjük ki, vagy feltételezzük, hogy idő függvényünk:

$f(t) = 0$, a $t< 0$ tartományban.

Ha az $f(t)e^{-\sigma t}$, ahol $\sigma > 0$ szorzatfüggvényre alkalmazzuk a (2) szerinti egyoldalas $\mathcal{F}$ transzformációt a Laplace-transzformáció definíciós összefüggéséhez jutunk:

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \tag{5}$$

az $s=\sigma+j\omega$ új komplex változóval:

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = £\{f(t)\}. \tag{6}$$

Amennyiben $f(t)$ a 0-ban folytonos, vagy $t<0$ esetén 0:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = £\{f(t)\} \tag{7}$$

Ha valamely $F(s)$ transzformált függvény adott, a hozzá tartozó időfüggvény a következő inverz transzformációs összefüggéssel határozható meg:

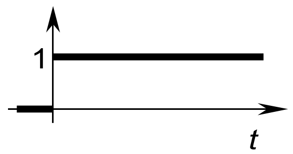
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi j} \displaystyle\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds = £^{-1}\{F(s)\} & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases} \tag{8}$$

ahol $£^{-1}$ az inverz Laplace-transzformáció.

3.1 Néhány egyszerű függvény Laplace-transzformáltja

3.1.1 Az egységugrás Laplace transzformáltja

$f(t)=1(t)$



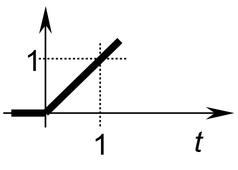
$F(s)=?$

$$F(s) = £\{1(t)\} = \int_{0}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \tag{9}$$

miután feltételünk volt, hogy $Re\{s\}=\sigma > 0$.

3.1.2 Az egységnyi sebességugrás Laplace transzformáltja

$f(t)=1(t)\cdot t$



$F(s)=?$

$$F(s)=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt$$

Az alábbi parciális integrálási szabályt alkalmazva:

$$\int u\cdot v'dt=u\cdot v-\int u'\cdot vdt$$

$$\begin{pmatrix} (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' & /\int \\ u\cdot v=\int u'\cdot vdt+\int u\cdot v'dt & \\ u\cdot v-\int u'\cdot vdt=\int u\cdot v'dt & \end{pmatrix} \text{,ahol} \quad \begin{matrix} u(t)=t & v'(t)=e^{-st} \\ u'(t)=1 & v(t)=-\dfrac{e^{-st}}{s} \end{matrix}$$

Behelyettesítve:

$$F(s)=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt=\left[t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty 1\cdot\frac{e^{-st}}{-s}dt=0-(-0)+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2} \qquad (10)$$

3.1.3 Az exponenciális függvény Laplace transzformáltja

Az $f(t)=e^{-t/T}$ időfüggvény Laplace transzformáltja:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-t/T}\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+1/T)t}dt=\left[\frac{e^{-(s+1/T)t}}{-(s+1/T)}\right]_0^\infty=\frac{1}{s+1/T}=\frac{T}{1+sT}, \qquad (11)$$

tehát az exponenciális függvénynek is algebrai függvény felel meg!

Hasonlóképpen járunk el bonyolultabb függvények esetén is, ami gyakran jelentős munkát igényelhet. Ezért igen nagyszámú függvény Laplace-transzformáltját előállították, és külön kézikönyvekben közrebocsátották.

A rendszertechnikai vizsgálatok során szinte kivétel nélkül megoldhatók a feladatok e kézikönyvek alkalmazásával.

Elmélet: FODOR GYÖRGY: A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása.
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1962.
Táblázatok: OBERHETTINGER,F. - BADII,L.: Tables of Laplace Transzforms.
SPRINGER-Verlag. 1973.
Berlin-Heidelberg-New-York.

3.2 Fontosabb alkalmazási szabályok (műveletek)

A Laplace transzformáció tehát az $f(t)$ valós változójú függvényhez a transzformációs összefüggés szerint az s komplex változójú függvényt rendeli.

Kérdés: az $f(t)$ függvényen végzett alapvető műveletek miként érvényesülnek a transzformált tartományban?

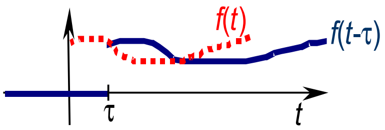
3.2.1 LINEARITÁSI szabály

- Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja £$\{f(t)\}=F(s)$ akkor £$\{K\cdot f(t)\}=K\cdot$£$\{f(t)\}=K\cdot F(s)$.
- Adott $f_1(t)$, $f_2(t)$, amelyeknek Laplace transzformáltjai $F_1(s)$, $F_2(s)$ akkor £$\{f_1(t)+f_2(t)\}=$ £$\{f_1(t)\}+$ £ $\{f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s)$.

Mindkét törvényszerűség azzal igazolható, hogy a Laplace transzformáció tulajdonképpen határozott integrál.

3.2.2 ELTOLÁSI szabály

Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja £$\{f(t)\}=F(s)$, ekkor $f(t-\tau)$ esetén a Laplace-transzformáció eredménye:



Legyen $t-\tau=z$, ekkor $t=z+\tau$, amiből $dt=dz$ következik.

$$\begin{aligned}&£\{f(t-\tau)\}=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(z)e^{-(z+\tau)s}dz=\int_0^\infty f(z)e^{-zs}e^{-\tau s}dz=\\&=e^{-\tau s}\int_0^\infty f(z)e^{-zs}dz=e^{-\tau s}\cdot F(s)\end{aligned}\tag{12}$$

3.2.3 HASONLÓSÁGI szabály

Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja £$\{f(t)\}=F(s)$, ekkor $f(a\cdot t)$ esetén a Laplace-transzformáció eredménye:

Legyen $at=z$, ekkor $t=\frac{z}{a}$, és $dt=\frac{1}{a}dz$.

$$£\{f(a\cdot t)\}=\int_0^\infty f(a\cdot t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(z)\cdot e^{-s\frac{z}{a}}\frac{1}{a}dz=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)\cdot e^{-\frac{s}{a}z}dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\tag{13}$$

3.2.4 DIFFERENCIÁLÁS időtartományban

Adott $f(t)$, amelynek deriváltja $\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$, és £$\{f(t)\}=F(s)$. Ennek Laplace-transzformáltja:

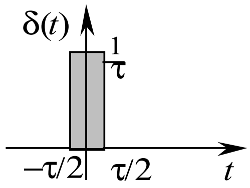
$$£\{f'(t)\}=\int_{-0}^\infty f'(t)\cdot e^{-st}dt=\left[f(t)\cdot e^{-st}\right]_{-0}^\infty-\int_{-0}^\infty f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}dt=0-f(-0)+s\cdot F(s)\tag{14}$$

Első lépésként, a már bemutatott, parciális integrálást alkalmaztuk a következő helyettesítéssel: $v'=f'(t)$, és $u=e^{-st}$, $\Rightarrow v=f(t)$, $u'=-s\cdot e^{-st}$. Mivel létezik $f(t)$ Laplace-transzformáltja, ezért $f(\infty) \cdot e^{-s\infty} = 0$. Az integrálból -$s$ kiemelhető, ami marad az pedig $f(t)$ Laplace-transzformáltja.

Általánosan: $£\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - s^{n-2} f'(-0) ... - f^{(n-1)}(-0)$.

Általában a kezdeti feltételeket 0-nak választjuk, így csak $s^n F(s)$ marad.

Néhány esetben azonban probléma adódhat. Mi lesz a deriváltja például az $1(t)$ függvénynek? Megoldás: $1(t)' = \delta(t)$, azaz a **Dirac delta** függvény. A következő ábra szemlélteti a függvény egy lehetséges származtatását:



ahol a függvény alatti terület egységnyi, és $\tau \to 0$. Így adódik, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$, ezért $\int \delta(t) dt = 1(t)$.

Az előzőekben leírtak alapján: $£\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty 1(t)' \cdot e^{-st} dt = s \cdot £\{1(t)\} - \delta(-0) = s\frac{1}{s} = 1$

3.2.5 INTEGRÁLÁS időtartományban

Adott $f(t)$, amelynek létezik a primitív függvénye, és £ $\{f(t)\} = F(s)$.

Mi lesz az időtartománybeli integrál Laplace-transzformáltja?

$$£\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} dt = \left[-\int_0^t f(\tau) d\tau \frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = -0 + 0 + \frac{1}{s} F(s) \qquad (15)$$

A feladatot parciális integrálással oldottuk meg, a következő helyettesítéseket alkalmazva: $u = \int_0^t f(\tau) d\tau$, $v' = e^{-st}$. A kapott eredmény általánosítható, akkor $\frac{1}{s^n} F(s)$ lesz az eredmény.

<u>**Fontos következtetés:**</u> mivel a differenciálásnak illetve integrálásnak s-el való szorzás illetve osztás felel meg, a differenciál egyenletek helyébe a transzformált tartományban algebrai egyenletek lépnek. Így a feladatok megoldása lényegesen egyszerűsödik.

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Sorszám	Időfüggvény	Laplace-transzformált
1	$F(t) \quad t>0$	$F(s)$
2	$\delta(t)$	1
3	$\delta(t\text{-}\tau)$	$e^{-s\tau}$
4	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
5	$1(t\text{-}\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$
7	$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{a+s}$
8	$\frac{1}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Ts}$
9	$1-e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$
10	$\frac{1}{T^2}te^{-t/T}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
11	$\frac{1}{T_1-T_2}\left(e^{-t/T_1}-e^{-t/T_2}\right)$	$\frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$
12	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
13	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
14	$\cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
15	$-\frac{1}{T}\mathrm{sh}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1-T^2s^2}$
16	$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$
17	$T\left(e^{-t/T}+\frac{t}{T}-1\right)$	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$
18	$1-\frac{T+t}{t}e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$

4 Alkalmazási példa

1. Oldjuk meg a $T\frac{dv}{dt}+v=K\cdot u$ inhomogén elsőrendű differenciál egyenletet,

a, ha $u(t)=\delta(t)$ és $v(-0)=0$ a kezdeti feltétel.

Vessük Laplace-transzformáció alá a differenciál egyenletet, és rendezzük:

$$\text{£}\left\{T\tfrac{dv}{dt}+v\right\}=\text{£}\{K\cdot u\}$$

$$T\text{£}\left\{\tfrac{dv}{dt}\right\}+\text{£}\{v\}=K\text{£}\{u\}$$

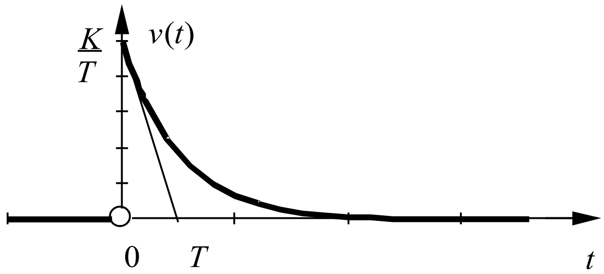
$$Ts\text{£}\{v\}+\text{£}\{v\}=K\text{£}\{u\}$$

$$\text{£}\{v\}=\tfrac{K}{1+Ts}\text{£}\{u\}$$

Mivel $u(t)=\delta(t)$ (Dirac delta), ezért Laplace-transzformáltja 1. (táblázat 2. sor)

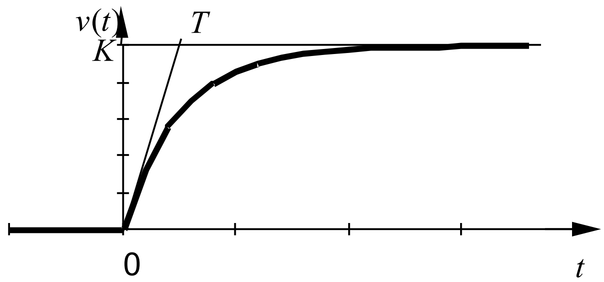
$$v(t)=\text{£}^{-1}\{V(s)\}=\text{£}^{-1}\left\{\tfrac{K}{1+Ts}\right\}=K\cdot\text{£}^{-1}\left\{\tfrac{1}{1+Ts}\right\}=\tfrac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

Az időfüggvény meghatározásához a táblázat 8. sorát használhatjuk fel.



b, $u(t)=1(t)$ ugrásfüggvény. Ennek transzformáltja: $1/s$. Behelyettesítve, és felhasználva a táblázat 9. sorát:

$$v(t)=\text{£}^{-1}\{V(s)\}=\text{£}^{-1}\left\{\frac{K}{1+Ts}\cdot\frac{1}{s}\right\}=K\cdot\text{£}^{-1}\left\{\frac{1}{1+Ts}\cdot\frac{1}{s}\right\}=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Látható, hogy az u függvényében egészen más eredményt kaptunk. Ez a példa lehetőséget biztosít arra, hogy alapvető rendszertechnikai ismereteket bemutassunk. Tegyük fel például, hogy az egyenlet egy autómotor erősen leegyszerűsített leíróegyenlete, amely a gázadás ($u(t)$) és a fordulatszám ($v(t)$) kapcsolatát modellezi. Az **a,** esetben csak egy „gázfröccsöt” adtunk, ennek következményeként a fordulatszám hirtelen felugrott, majd visszaállt az alapjárati értékre. Rendszertechnikai szóhasználattal: a rendszert leíró egyenlet a differenciálegyenlet, $u(t)$ a bemenő jel, $v(t)$ pedig a rendszer válasza (lsd. ábra). Esetünkben a bemenőjel $\delta(t)$, ekkor a válaszfüggvényt <u>súlyfüggvény</u>nek nevezzük, és $w(t)$ a jelölése. Mint a konvolúciónál majd láthatjuk, ennek ismeretében tetszőleges bemenőjelre meghatározhatjuk a kimenőjelet.

A **b,** esetben a bemenőjel az $1(t)$ volt (hirtelen gázadás). Ekkor $v(t)$ neve <u>átmeneti függvény</u>, és jelölése: $v_a(t)$. Ennek ismerete is lehetőséget biztosít a kimenő jel meghatározására, hiszen $\int\delta(t)=1(t)$. A rendszervizsgálatok tipikus bemenő jelei közé tartozik a $\delta(t)$ és az $1(t)$.

5 Konvolúciós szorzás időtartományban

Az $u(t)$ bemenő jelet bontsuk fel $d\tau$ szélességű egymást követő impulzusok sorozatára. Ekkor $u(\tau)\delta(t\text{-}\tau)$ bemenőjel hatására (mivel $u(\tau)$ t-re konstans!) $u(\tau)w(t\text{-}\tau)$ kimenőjel keletkezik, ahol $w(t\text{-}\tau)$ a súlyfüggvény. Ezen súlyfüggvények szuperpozíciója viszont az $u(t)$-re adandó $v(t)$ válaszfüggvényt adja:

$$v(t) = \int_0^t w(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Más jelöléssel $v(t)=w(t)*u(t)$, amelyet konvolúciós szorzásnak nevezünk. Általánosan igaz a következő összefüggés:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau. \tag{17}$$

A rendszertechnikában a konvolúciónak kiemelkedő szerepe van mivel bizonyítható, hogy ha $f(t)$ Laplace-transzformáltja $F(s)$, $g(t)$-é pedig $G(s)$, akkor:

$$£^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t)*g(t), \tag{18}$$

azaz két függvény Laplace tartománybeli szorzata az időtartományban konvolúciós szorzásnak felel meg. A bizonyítás röviden, felhasználva, hogy többes integráloknál bizonyos kikötések mellett az integrálok felcserélhetők, valamint a nemrég bemutatott eltolási szabályt alkalmazva:

$$\int_0^\infty\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\cdot e^{-st}dt = \int_0^t\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}dtd\tau = \int_0^t f(\tau)\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dtd\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau)e^{-s\tau}G(s)d\tau = G(s)\int_0^t f(\tau)e^{-s\tau}d\tau, \text{ ha } t\to\infty, \text{ akkor} = G(s)F(s).$$

6 Alkalmazási példák

2. Határozza meg az alábbi transzformált függvényhez tartozó időfüggvényt:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

A kiosztott transzformációs táblázatban ilyen alakú függvényt nem találunk. Viszont tudjuk, hogy minden racionális törtfüggvény ún. résztörtekre bontható az alábbiak szerint:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+4}$$

Ez esetben (mivel a nevező egyszeres valós gyökökkel rendelkezik) a számláló együtthatók a következőképpen határozhatók meg:

$$c_i = \lim_{s\to\alpha_i}(s-\alpha_i)\cdot F(s),$$

ahol az α_i-k a nevező gyökei. Esetünkben a gyökök: -1, -2, -4.

$$c_1 = (s+1)\cdot F(s)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{2}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$c_2 = (s+2)\cdot F(s)\Big|_{s=-2} = \left.\frac{2}{(s+1)(s+4)}\right|_{s=-2} = -1$$

$$c_3 = (s+4)\cdot F(s)\Big|_{s=-4} = \left.\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{3}$$

A linearitási szabály értelmében az inverz transzformációt tagonként végezhetjük el. Ehhez átalakítva az egyes tagokat:

$$F(s)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}s}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}s}$$

Felhasználva a transzformációs táblázatot (7. sor):

$$f(t)=\frac{2}{3}\cdot e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{3}\cdot e^{-4t}$$

3. Határozza meg az alábbi transzformált függvényhez tartozó időfüggvényt:

$$F(s)=\frac{A_p}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$$

A transzformációs táblázatban ez az összefüggés nem szerepel, de felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyek külön-külön már szerepelnek:

$$F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)=\frac{A_p}{(1+T_1s)(1+T_2s)}\cdot\frac{1}{s(1+T_3s)}$$

E szorzatnak időtartományban konvolúciós szorzat felel meg, tehát:

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau,\quad \text{ahol}$$

$$f_1(t)=\pounds^{-1}\{F_1(s)\}=\frac{A_p}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

$$f_2(t)=\pounds^{-1}\{F_2(s)\}=1-e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

$$f(t)=\int_0^t\frac{A_p}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{\tau}{T_1}}-e^{-\frac{\tau}{T_2}}\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{T_3}}\right)d\tau$$

Összeszorzás és kiemelés után:

$$f(t)=\frac{A_p}{T_1-T_2}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{T_1}}-e^{-\frac{\tau}{T_2}}-e^{-\frac{t}{T_3}}\cdot\left(e^{-\tau\frac{T_3-T_1}{T_1T_3}}-e^{-\tau\frac{T_3-T_2}{T_2T_3}}\right)d\tau=$$

$$=\frac{A_p}{T_1-T_2}\left[-T_1e^{-\frac{\tau}{T_1}}+T_2e^{-\frac{\tau}{T_2}}-e^{-\frac{t}{T_3}}\cdot\left(-\frac{T_1T_3}{T_3-T_1}e^{-\tau\frac{T_3-T_1}{T_1T_3}}+\frac{T_2T_3}{T_3-T_2}e^{-\tau\frac{T_3-T_2}{T_2T_3}}\right)\right]_0^t=$$

$$=\frac{A_p}{T_1-T_2}\left[(T_1-T_2)+\frac{T_1^2}{T_3-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{T_2^2}{T_3-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}+\frac{T_3^2(T_2-T_1)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}e^{-\frac{t}{T_3}}\right]$$

Ha pl. A_p=2, T_1=10sec, T_2=20sec, T_3=30sec, akkor az időfüggvénybe való behelyettesítés után a következő eredményt kapjuk:

$$f(t)=\frac{2}{-10}\left[-10+\frac{100}{20}e^{-\frac{t}{10}}-\frac{400}{10}e^{-\frac{t}{20}}+\frac{900\cdot 10}{20\cdot 10}e^{-\frac{t}{30}}\right]$$

$$f(t)=2\left[1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}}+4e^{-\frac{t}{20}}-\frac{9}{2}e^{-\frac{t}{30}}\right]$$

4. Ha egy tömegpontra, amely csillapítatlan rezgőmozgást végez periodikus erőhatást gyakorolnak, a pont kényszerrezgést végez. Legyen a periodikus gerjesztő erő $F=F_0\sin\omega_g t$, ekkor a mozgást leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{y}+\omega^2 y=\frac{F_0}{m}\sin\omega_g t$$

Legyenek a kezdeti feltételek: $y(0)=0,\ \dot{y}(0)=v_0$, azaz a tömegpont középen van. Határozzuk meg a kitérést, mint az idő függvényét.

Jelenlegi ismereteink szerint ezt a feladatot megoldhatjuk időtartományban is, operátoros tartományban is. Hasonlítsuk össze a két megoldási módszert.

a, A kapott differenciálegyenlet egy állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris egyenlet. Általános megoldását a homogén rész általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként kaphatjuk meg. A megfelelő homogén $\left(\ddot{y}+\omega^2 y=0\right)$ egyenlet megoldását keressük $y_h=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ alakban*. A kezdeti feltételeket ugyan később kell csak figyelembe venni, de célszerűségi okokból ettől most eltérünk. Kihasználjuk, hogy $y(0)=0$, ezért a megoldásban cos-os tag biztosan nem lesz, azaz $B=0$. Ellenőrizzük most, hogy y_h valóban megoldása a homogén egyenletnek:

$$\dot{y}_h=A\omega\cos\omega t,\ \ \ddot{y}_h=-A\omega^2\sin\omega t.$$

Behelyettesítve:

$$-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2 A\sin\omega t=0.$$

Látható tehát, hogy y_h valóban a homogén egyenlet megoldása. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y=y_h+a\sin\omega_g t+b\cos\omega_g t=A\sin\omega t+a\sin\omega_g t+b\cos\omega_g t$$

próbafüggvény felhasználásával. Az $y(0)=0$ kezdeti feltétel miatt most is megállapítható, hogy b=0. Helyettesítsük be a próbafüggvényt a differenciálegyenletbe, és rendezzük:

$$\ddot{y}=-A\omega^2\sin\omega t-a\omega_g^2\sin\omega_g t$$

$$-A\omega^2\sin\omega t-a\omega_g^2\sin\omega_g t+\omega^2 A\sin\omega t+\omega^2 a\sin\omega_g t=\frac{F_0}{m}\sin\omega_g t$$

$$a\sin\omega_g t\left(\omega^2-\omega_g^2\right)=\frac{F_0}{m}\sin\omega_g t$$

$$a\left(\omega^2-\omega_g^2\right)=\frac{F_0}{m}$$

* *A homogén rész megoldása két egymástól lineárisan független partikuláris megoldás összegeként kapható. A differenciál egyenlet partikuláris megoldását $y=e^{\lambda t}$ alakban keressük, mert ez az egyetlen függvény, amely arányos a deriváltjaival. Behelyettesítve a differenciál egyenletbe:*

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+\omega^2 e^{\lambda t}=0\Rightarrow\lambda^2+\omega^2=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm j\omega$$

$$y_1=e^{j\omega t},y_2=e^{-j\omega t}$$

Ez két lineárisan független megoldás, hiszen $c_1y_1+c_2y_2=0$ csak akkor áll fenn, ha $c_1=c_2=0$. A homogén rész általános megoldása tehát: $y_h=c_1e^{j\omega t}+c_2e^{-j\omega t}$

Alkalmazva az EULER-féle formulát: $y_h=A\sin\omega t+B\cos\omega t$, ahol $A=c_1+c_2$, és $B=c_1-c_2$.

$$a = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}$$

Ahogy az várható is volt, a megoldás egy része (a homogén egyenlet megoldása) kiesett így az egyik paramétert meg lehetett határozni. Az egyik ($y(0)=0$) kezdeti feltételt már felhasználtuk, vegyük most a másikat A meghatározásához:

$$\dot{y} = A\omega\cos\omega t + \frac{F_0\omega_g}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\cos\omega_g t$$

$$\dot{y}(0) = A\omega + \frac{F_0\omega_g}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)} = v_0$$

$$A = \frac{v_0}{\omega} - \frac{F_0\omega_g}{m\omega\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}.$$

Behelyettesítés után nyerjük a differenciálegyenlet megoldását:

$$y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t - \frac{F_0\omega_g}{m\omega\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\sin\omega t + \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\sin\omega_g t.$$

b, Oldjuk meg ugyanezt a feladatot Laplace-transzformációval. A differenciálegyenlet Laplace-transzformáltja[**] :

$$s^2 Y(s) - v_0 + \omega^2 Y(s) = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_g}{s^2 + \omega_g^2}$$

Ezt Y(s)-re rendezve:

$$Y(s) = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_g}{s^2 + \omega_g^2}\cdot\frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2}.$$

A Laplace-transzformáció tulajdonságait figyelembe véve az inverz transzformációt tagonként végezhetjük el a táblázat segítségével. Az első tag visszatranszformálását részlettörtekre bontással is elvégezhetjük – ekkor elegendő a kiosztott segédlet – vagy felhasználhatjuk a következő kiegészítő összefüggést:

$$F(s) = \frac{1}{\left(s^2 + a^2\right)\left(s^2 + b^2\right)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{ab\left(a^2 - b^2\right)}\left(a\sin bt - b\sin at\right)$$

amellyel az első tag inverz transzformáltja:

$$£^{-1}\left\{\frac{F_0\omega_g}{m}\cdot\frac{1}{\left(s^2 + \omega_g^2\right)\left(s^2 + \omega^2\right)}\right\} = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\sin\omega_g t - \frac{F_0\omega_g}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)\omega}\sin\omega t,$$

a második tag inverz transzformáltja a táblázat segítségével

$$£^{-1}\left\{\frac{v_0}{s^2 + \omega^2}\right\} = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t,$$

a differenciálegyenlet megoldása tehát:

$$y(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\sin\omega_g t - \frac{F_0\omega_g}{m\omega\left(\omega^2 - \omega_g^2\right)}\sin\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Látható, hogy ezzel a módszerrel is ugyan azt az eredményt kaptuk.

[**] *A kezdeti feltételeket itt kell figyelembe venni!*

7 Átviteli függvény

Folytonos, lineáris, koncentrált paraméterű rendszerek esetén a rendszert leíró differenciálegyenlet állandó együtthatós, lineáris, közönséges inhomogén differenciálegyenlet lesz, melynek általános alakja:

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t), \tag{19}$$

ahol $u(t)$ a rendszert érő hatást leíró-, $v(t)$ pedig a rendszer válaszát leíró függvény.

Tegyük fel, hogy $v(0) = 0, \dot{v}(0) = 0, \cdots v^{(n-1)}(0) = 0,$ valamint $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0, \cdots u^{(m-1)}(0) = 0.$ Ezen feltételek mellett állítsuk elő a differenciálegyenlet Laplace transzformáltját*:

$$a_n \cdot s^n \cdot V(s) + \cdots + a_1 \cdot s \cdot V(s) + a_0 \cdot V(s) = b_m \cdot s^m \cdot U(s) + \cdots + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s) \tag{20}$$

Kiemelve $V(s)$-t és $U(s)$-t:

$$V(s) \cdot \left(a_n \cdot s^n + \cdots + a_1 \cdot s + a_0\right) = U(s) \cdot \left(b_m \cdot s^m + \cdots + b_1 \cdot s + b_0\right).$$

Az átviteli függvény definíció szerint a kimenet Laplace transzformáltja osztva a bemenet Laplace transzformáltjával, tehát:

$$Y(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}. \tag{21}$$

Ha egy rendszernek ismerjük az átviteli függvényét, akkor könnyen meghatározhatjuk a különböző bementekhez tartozó válaszokat, hiszen:

$$V(s) = Y(s) \cdot U(s) \tag{22}$$

Problémát csak az inverz transzformáció okozhat, ami nem minden esetben végezhető el.

A rendszer vizsgálatok során több un. tipikus vizsgálójelet alkalmaznak. Ezek közül most kettőnek, az egység impulzusnak ($u(t)=\delta(t)$) és az egységugrásnak ($u(t)=1(t)$) a használatát vizsgáljuk meg.

7.1 Válasz egységimpulzus bemenet esetén

Ebben az esetben a választ súlyfüggvénynek hívjuk és a jele $w(t)$. Az egységimpulzus Laplace transzformáltja 1, így a válasz:

$$W(s) = Y(s) \tag{23}$$

Elmondhatjuk tehát, hogy az átviteli függvény a súlyfüggvény Laplace transzformáltja.

7.2 Válasz egységugrás bemenet esetén

Ebben az esetben a választ átmeneti függvénynek hívjuk és a jele $v_a(t)$. Az egységugrás Laplace transzformáltja $\frac{1}{s}$, így a válasz:

$$V_a(s) = \frac{1}{s} \cdot Y(s) \tag{24}$$

Felhasználva az előző (súlyfüggvényre vonatkozó) megállapításunkat:

$$V_a(s) = \frac{1}{s} \cdot W(s) \tag{25}$$

*Ha $f(t)$ Laplace transzformáltja $F(s)$, akkor $\frac{df}{dt}$ Laplace transzformáltja $s \cdot F(s) - f(-0)$. A feltételekre azért van szükség, hogy az $f(-0)$ értéke zérus legyen.

Tudjuk azonban azt is, hogy ha az operátoros tartományban s-el osztunk, akkor az az időtartománybeli integrálásnak felel meg, így:

$$v_a(t) = \int_0^t w(\tau) \cdot d\tau, \tag{26}$$

azaz az átmeneti függvényt a súlyfüggvény integrálásával kapjuk. Természetesen igaz ennek fordítottja is:

$$w(t) = \frac{dv_a}{dt}. \tag{27}$$

Hasonló kapcsolat határozható meg a – ritkábban használt – egységnyi sebességugrás ($t \cdot 1(t)$), és az egységnyi gyorsulásugrás ($\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$) esetén is:

$$\frac{d^3 v_{t^2/2}}{dt^3} = \frac{d^2 v_t}{dt^2} = \frac{dv_a}{dt} = w(t) \tag{28}$$

8 Példák átviteli függvény alkalmazására

1. Legyen a rendszert leíró differenciálegyenlet: $T \cdot \dot{v} + v(t) = K \cdot u(t)$, és $v(0) = 0$. Határozzuk meg a rendszer válaszát $u(t) = \delta(t); 1(t); t \cdot 1(t); \sin \alpha t$ és $1(t - \tau)$ esetén.

Első lépésként állítsuk elő a rendszer átviteli függvényét:

$$T \cdot s \cdot V(s) + V(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T \cdot s}$$

Ebből már könnyen felírható a válasz transzformált alakja:

$$V(s) = \frac{K}{1 + T \cdot s} \cdot U(s)$$

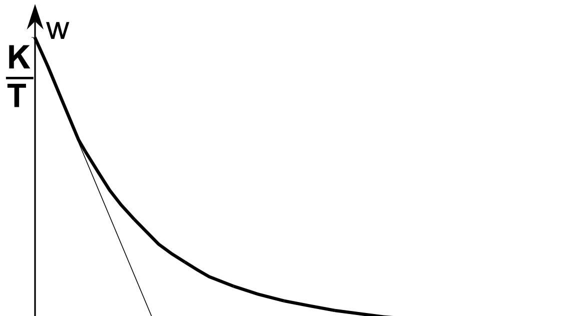
a, $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$V(s) = K \frac{1}{1 + T \cdot s}$$

A táblázat alapján:

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{1 + T \cdot s}\right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \text{ ezért}$$

$$v(t) = K \cdot \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} = w(t)$$



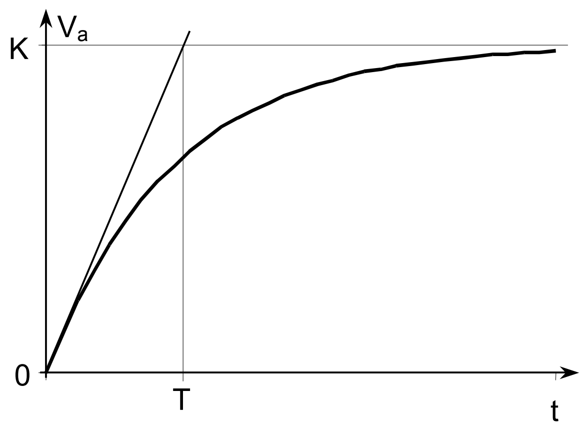
b, $u(t)=1(t)\Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$

$$V(s)=K\frac{1}{s\cdot(1+T\cdot s)}$$

A táblázat alapján:

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s\cdot(1+T\cdot s)}\right\}=1-e^{-\frac{t}{T}}\text{, ezért}$$

$$v(t)=K\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)=v_a(t)$$



Ellenőrzésre felhasználhatjuk a súlyfüggvény és az átmeneti függvény közötti kapcsolatot:

$$w(t)=\frac{dv_a}{dt}=\left(K\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)'=\left(K-K\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)'=0-K\cdot\left(-\frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

Mint láthatjuk, a deriválás eredményeként tényleg a súlyfüggvényt kaptuk.

c, $u(t)=t\cdot 1(t)\Rightarrow U(s)=\frac{1}{s^2}$

$$V(s)=K\frac{1}{s^2\cdot(1+T\cdot s)}$$

A táblázat alapján:

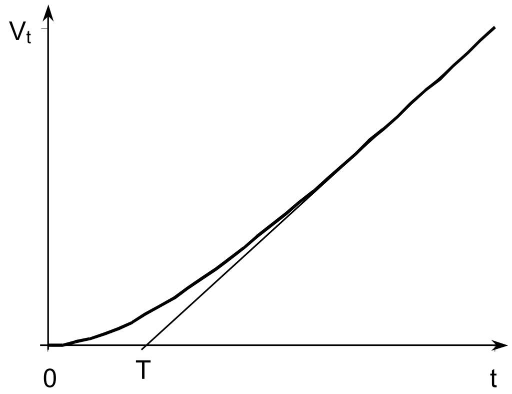
$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\cdot(1+T\cdot s)}\right\}=T\left(e^{-\frac{t}{T}}+\frac{t}{T}-1\right)\text{, ezért}$$

$$v(t)=K\cdot\left(T\cdot e^{-\frac{t}{T}}+t-T\cdot 1\right)=v_t(t)$$

Ellenőrzésre felhasználhatjuk azt a tényt, hogy az eredményünk deriválásával az átmeneti függvényt kell kapnunk:

$$\frac{dv_t}{dt}=\left(K\cdot\left(T\cdot e^{-\frac{t}{T}}+t-T\right)\right)'=K\cdot T\cdot\left(-\frac{1}{T}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T}}+K-0=K\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)=v_a(t)$$

Mint láthatjuk, a deriválás eredményeként tényleg az átmeneti függvényt kaptuk.



d, $u(t) = \sin \alpha t \Rightarrow U(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

$$V(s) = \frac{K}{T} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} \cdot \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

Mivel a táblázat most nem segít, ezért nekünk kell meghatározni az inverz függvényt. A $V(s)$ azonban két olyan függvény szorzataként van felírva, amelyek benne vannak a táblázatban. Ilyen esetben a konvolúciós szorzással próbálkozhatunk.

A későbbiekben – más paraméterekkel – elő fog még fordulni ez a függvény, ezért egy általánosabb alak visszatranszformálását végezzük el:

$$F(s) = \frac{1}{a+s}; \quad G(s) = \frac{\alpha^2}{s^2 + \alpha^2}$$

$$f(t) = e^{-at}; \quad g(t) = \sin \alpha t$$

Alkalmazva a konvolúciót, miszerint:

$$£^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

esetünkben az

$$I = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cdot \sin \alpha\tau \, d\tau$$

integrált kell meghatározni. Mivel ebben a formában nem szerepel integrál táblázatban, ezért nekünk kell meghatároznunk. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét $\dot{v} = e^{-a(t-\tau)}$, és $u = \sin \alpha\tau$ helyettesítésekkel:

$$I = \left[\frac{e^{-a(t-\tau)}}{a} \sin \alpha\tau \right]_0^t - \frac{\alpha}{a} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cos \alpha\tau \, d\tau = \frac{\sin \alpha t}{a} - 0 - \frac{\alpha}{a} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cos \alpha\tau \, d\tau$$

Ismét parciális integrálást kell alkalmazni, de most $u = \cos \alpha\tau$:

$$I = \frac{\sin \alpha t}{a} - \frac{\alpha}{a} \left[\frac{e^{-a(t-\tau)}}{a} \cos \alpha\tau \right]_0^t + \frac{\alpha}{a} \int_0^t \frac{-\alpha}{a} e^{-a(t-\tau)} \sin \alpha\tau \, d\tau =$$

$$= \frac{\sin \alpha t}{a} - \frac{\alpha}{a^2} \cos \alpha t + \frac{\alpha}{a^2} e^{-at} - \frac{\alpha^2}{a^2} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sin \alpha\tau \, d\tau$$

Vegyük észre, hogy a megmaradt integrál éppen a kiinduló integrálunk, amit I-vel jelöltünk, ezért:

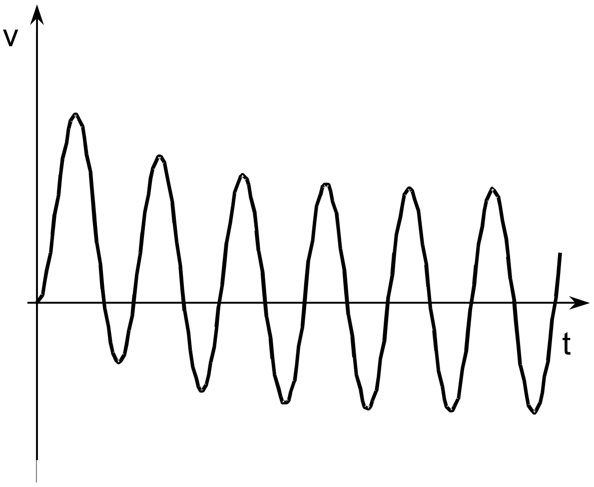
$$I = \frac{\sin \alpha t}{a} - \frac{\alpha}{a^2} \cos \alpha t + \frac{\alpha}{a^2} e^{-at} - \frac{\alpha^2}{a^2} I$$

Ebből az egyenletből I-t kifejezve kapjuk a keresett eredményt:

$$I = \frac{a}{\alpha^2 + a^2}\sin\alpha t - \frac{\alpha}{\alpha^2 + a^2}\cos\alpha t + \frac{\alpha}{\alpha^2 + a^2}e^{-at}\,. \qquad (29)$$

Esetünkben $a = \frac{1}{T}$ és $\frac{K}{T}$-vel szorozni kell, így a megoldás a lehetséges kiemelések után:

$$v(t) = \frac{K}{1+\alpha^2 T^2}\left(\sin\alpha t - \alpha T\cos\alpha t + \alpha T e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



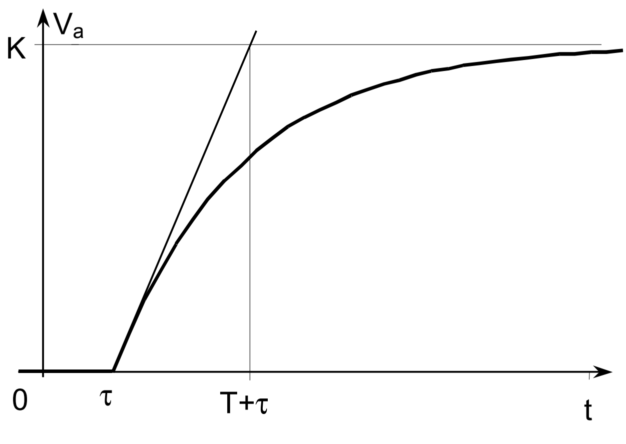
A megoldás helyességét legegyszerűbben a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

e, $u(t) = 1(t-\tau) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}e^{-\tau s}$

$$V(s) = K\frac{1}{s\cdot(1+T\cdot s)}e^{-\tau s}$$

Ha egy visszatranszformálandó függvény $e^{-\tau s}$-el van szorozva, akkor csak azt kell vissza-transzformálni, ami szorozva van, de t helyett a t-τ helyen kell venni a függvényt (eltolási szabály), így a megoldás:

$$v(t) = K\cdot\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) = v_a(t-\tau)\,.$$



2. Legyen a rendszert leíró differenciálegyenlet: $\ddot{v}+4\cdot\dot{v}+3\cdot v(t)=u(t)$, és $v(0)=0;\ \dot{v}(0)=0$. Határozzuk meg a rendszer válaszát $u(t)=\delta(t);\ 1(t);\ t\cdot 1(t);\ \sin\alpha t$ és $1(t-\tau)$ esetén.

Első lépésként állítsuk elő a rendszer átviteli függvényét:

$$s^2\cdot V(s)+4\cdot s\cdot V(s)+3\cdot V(s)=U(s)$$

$$Y(s)=\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{3+4\cdot s+s^2}=\frac{1}{(1+s)(3+s)}$$

A nevezőben lévő másodfokú polinomot a gyöktényezős alak segítségével szorzat formájában is felírhatjuk. Ebből már könnyen felírható a válasz transzformált alakja:

$$V(s)=\frac{1}{(1+s)(3+s)}\cdot U(s)$$

a, $u(t)=\delta(t)\Rightarrow U(s)=1$

$$V(s)=W(s)=\frac{1}{(1+s)(3+s)}$$

A kiosztott transzformációs táblázatban ilyen alakú függvényt nem találunk. Viszont tudjuk, hogy minden racionális törtfüggvény ún. résztörtekre bontható az alábbiak szerint:

$$W(s)=\frac{1}{(1+s)(3+s)}=\frac{c_1}{1+s}+\frac{c_2}{3+s}$$

A c_1, c_2 konstansok meghatározására használhatjuk a 6. fejezet 2. példájában bemutatott módszert, vagy közös nevezőre hozva, majd összeadva a törteket, a számláló alapján felállíthatunk egy lineáris egyenletrendszert:

$$W(s)=\frac{1}{(1+s)(3+s)}=\frac{c_1}{1+s}+\frac{c_2}{3+s}=\frac{c_1(3+s)+c_2(1+s)}{(1+s)(3+s)}=\frac{(3c_1+c_2)+s(c_1+c_2)}{(1+s)(3+s)}$$

$3c_1+c_2=1$ a konstans tagra

$c_1+c_2=0$ az s - t tartalmazó tagokra

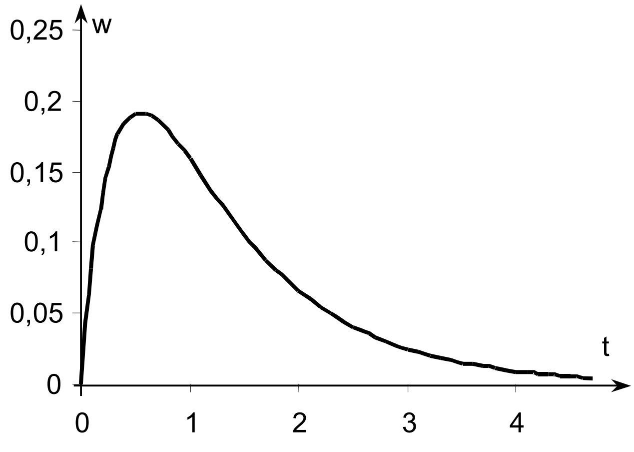
Az egyenletrendszer megoldása: $c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=-\frac{1}{2}$, így

$$W(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+s} \qquad (30)$$

A táblázat alapján:

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha+s}\right\}=e^{-\alpha\cdot t}\text{, ezért}$$

$$w(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$$



b, $u(t)=1(t) \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$

$$V(s)=V_a(s)=\frac{1}{s(1+s)(3+s)}$$

Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatnál a részletszámításokat mellőzve:

$$V_a(s)=\frac{1}{s(1+s)(3+s)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{1+s}+\frac{c_3}{3+s}=\frac{3c_1+s(4c_1+3c_2+c_3)+s^2(c_1+c_2+c_3)}{s(1+s)(3+s)}$$

$$3c_1=1$$

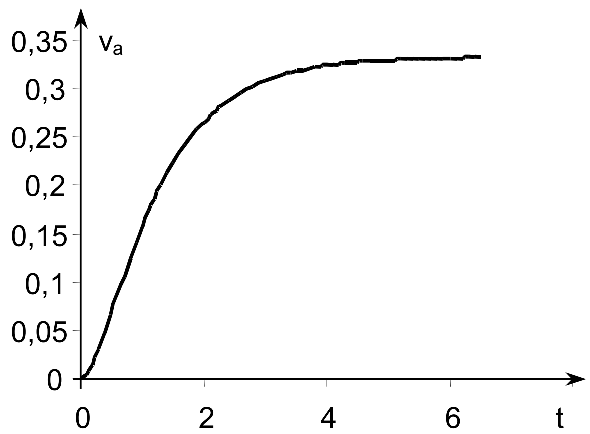
$$4c_1+3c_2+c_3=0$$

$$c_1+c_2+c_3=0$$

$$c_1=\frac{1}{3};\quad c_2=-\frac{1}{2};\quad c_3=\frac{1}{6}$$

$$V_a(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+s}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3+s}$$

$$v_a(t)=\frac{1}{3}\cdot 1(t)-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+\frac{1}{6}\cdot e^{-3t}$$



Oldjuk meg a feladatot másként is. Kihasználhatjuk, hogy már ismerjük a rendszer súlyfüggvényét, és amit keresünk, az az átmeneti függvény. Ezen két függvény között azonban ismert a kapcsolat:

$$v_a(t)=\int_0^t w(\tau)d\tau=\int_0^t\left(\frac{1}{2}e^{-\tau}-\frac{1}{2}e^{-3\tau}\right)d\tau=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-\tau}}{-1}\right]_0^t-\left[\frac{e^{-3\tau}}{-3}\right]_0^t\right)=\frac{1}{2}\left(-e^{-t}+1+\frac{e^{-3t}}{3}-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1(t)-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+\frac{1}{6}\cdot e^{-3t}$$

c, $u(t)=t\cdot 1(t) \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s^2}$

$$V(s)=V_a(s)=\frac{1}{s(1+s)(3+s)}$$

Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatnál, de mivel itt többszörös gyök is van (s=0), ezért az ebből adódó törtet minden – a gyök multiplicitásánal kisebb – kitevővel szerepeltetni kell. A részletszámításokat mellőzve:

$$V_t(s)=\frac{1}{s^2(1+s)(3+s)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s^2}+\frac{c_3}{1+s}+\frac{c_4}{3+s}=$$

$$=\frac{3c_2+s(3c_1+4c_2)+s^2(4c_1+c_2+3c_3+c_4)+s^3(c_1+c_3+c_4)}{s^2(1+s)(3+s)}$$

$$3c_2=1$$

$$3c_1+4c_2=0$$

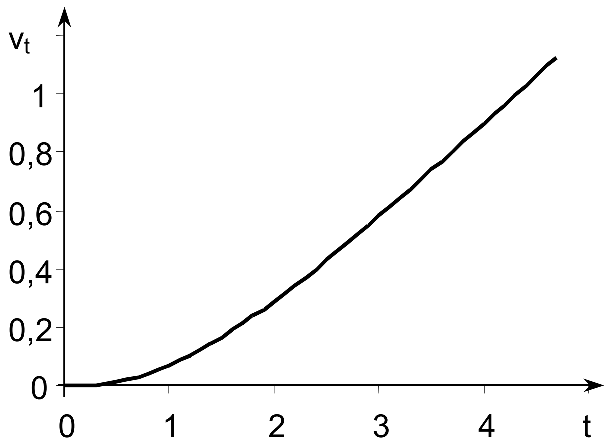
$$4c_1+c_2+3c_3+c_4=0$$

$$c_1+c_3+c_4=0$$

$$c_1=-\frac{4}{9};\quad c_2=\frac{1}{3};\quad c_3=\frac{1}{2};\quad c_4=-\frac{1}{18}$$

$$V_t(s)=-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3+s}$$

$$v_t(t)=-\frac{4}{9}\cdot 1(t)+\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}-\frac{1}{18}\cdot e^{-3t}$$



Ellenőrizzük a kapott eredményt a $\frac{dv_t}{dt}=v_a(t)$ összefüggés felhasználásával.

d, $u(t)=\sin\alpha t\Rightarrow U(s)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

$$V(s)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{(1+s)(3+s)}$$

A 2.a, feladatnál kapott (30) eredmény alapján:

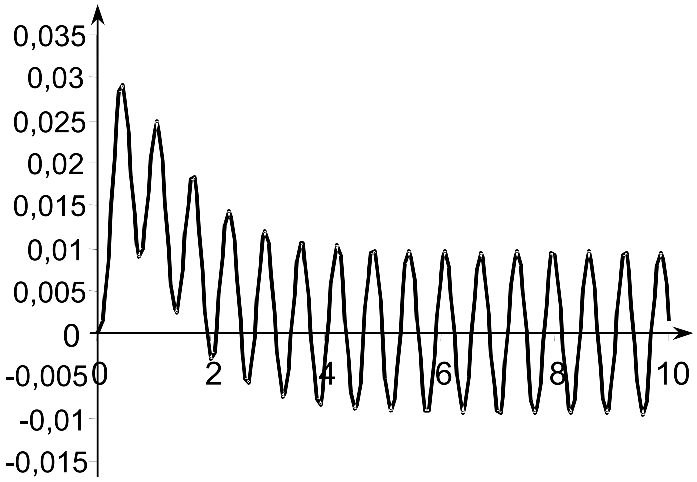
$$V(s)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{(1+s)(3+s)}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+s}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{3+s}=\frac{1}{2}\cdot V_1(s)-\frac{1}{2}\cdot V_2(s)$$

$V_1(s)$ és $V_2(s)$ hasonló szerkezetű, és inverz transzformáltjukat általános alakban az 1.d, feladatnál már meghatároztuk, így (29) alapján – $V_1(s)$ esetén a=1, $V_2(s)$ esetén pedig a=3 – helyettesítéseket alkalmazva:

$$v(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\sin\alpha t-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cos\alpha t+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}e^{-t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{9+\alpha^2}\sin\alpha t-\frac{\alpha}{9+\alpha^2}\cos\alpha t+\frac{\alpha}{9+\alpha^2}e^{-3t}\right)=$$

$$=\frac{3-\alpha^2}{(1+\alpha^2)(9+\alpha^2)}\sin\alpha t-\frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)(9+\alpha^2)}\cos\alpha t+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha^2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{9+\alpha^2}e^{-3t}$$

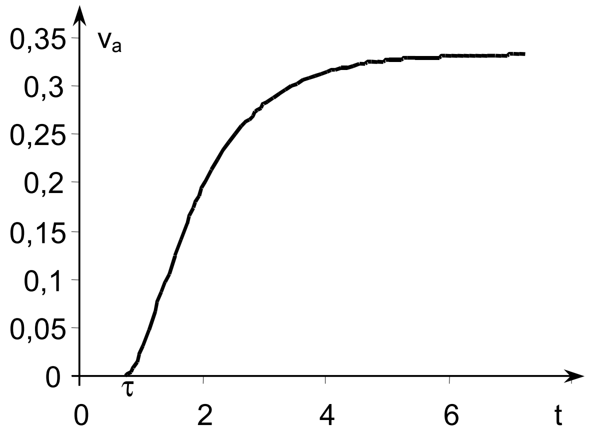


e, $u(t) = 1(t-\tau) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}$

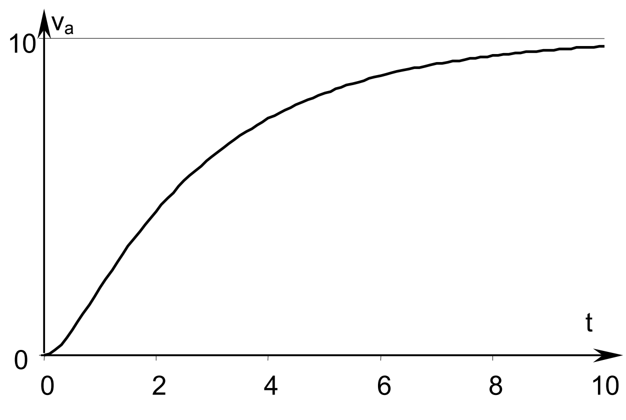
$$V(s) = \frac{1}{s(1+s)(3+s)} e^{-\tau s}$$

Ha egy visszatranszformálandó függvény $e^{-\tau s}$ -el van szorozva, akkor csak azt kell visszatranszformálni, ami szorozva van, de *t* helyett a *t*-τ helyen kell venni a függvényt (eltolási szabály), így a megoldás (2.b, alapján):

$$v_a(t-\tau) = \frac{1}{3} \cdot 1(t-\tau) - \frac{1}{2} \cdot e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{6} \cdot e^{-3(t-\tau)}$$

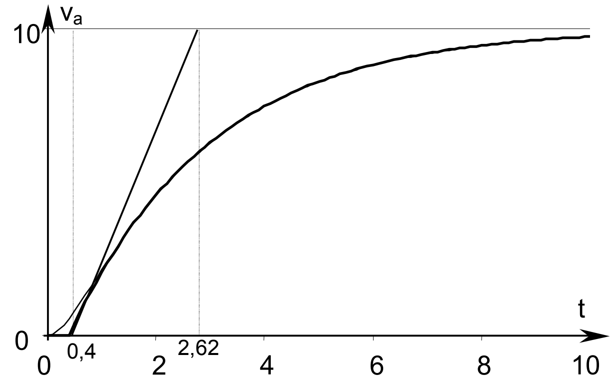


3. Méréssel meghatároztuk egy rendszer átmeneti függvényét:

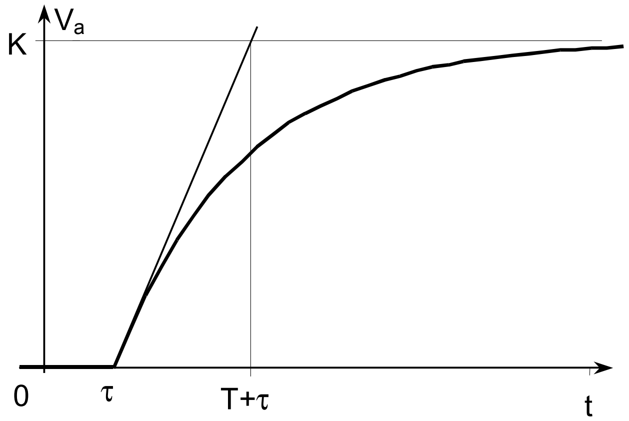


Határozzuk meg a rendszer *közelítő* átmeneti függvényét, súlyfüggvényét, átviteli függvényét, és a leíró differenciálegyenletet.

Első lépésként keresnünk kell olyan függvényt, amely az ábrán láthatóhoz hasonló jellegű. Leginkább megfelelőnek a 2,b és 1,e megoldások ábrája tűnik. A 2,b-vel az a baj, hogy túl meredeken indul, így válasszuk az 1,e-t.



Az ábrán vékony vonallal jelöltük az eredeti, mért görbét, vastaggal pedig a közelítést. Jól látható, hogy lényeges eltérés csak az elején van, később a közelítő görbe vastagabb vonala teljesen eltakarja az eredeti görbét.



Olvassuk le a paramétereket az ábráról: K=10; τ=0,4; T=2,22. Ezek felhasználásával a közelítő átmeneti függvény:

$$v_a(t) \approx K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) = 10 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-0,4}{2,22}}\right)$$

A súlyfüggvény:

$$\frac{dv_a}{dt} = w(t) \approx \frac{10}{2,22} e^{-\frac{t-0,4}{2,22}}$$

Az átviteli függvény:

$$Y(s) = £^{-1}\left\{10 \cdot \frac{1}{2,22} e^{-\frac{t-0,4}{2,22}}\right\} = 10 \cdot \frac{1}{1+2,22s} \cdot e^{0,4s}$$

A rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{v(s)}{u(s)} = \frac{10}{1+2,22s} e^{0,4s}$$

$$2,22 \cdot s \cdot v(s) + v(s) = 10 \cdot u(s) \cdot e^{0,4s}$$

$$2,22 \frac{dv}{dt} + v(t) = 10 \cdot u(t-0,4)$$

9 Példák konvolúció alkalmazására

1. Egy rendszer súlyfüggvénye: $w(t)=16\cdot e^{-2t}$. Határozzuk meg $u(t)=\sin 2t$ esetén a rendszer válaszát, valamint az átviteli függvényt.

Alkalmazzuk a konvolúciós tételt:

$$v(t)=\int_0^t w(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau=\int_0^t 16e^{-2(t-\tau)}\cdot\sin 2\tau\, d\tau=16\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot\sin 2\tau\, d\tau$$

A (29) összefüggés alapján a=α=2 helyettesítéssel:

$$v(t)=16\left(\frac{2}{4+4}\sin 2t-\frac{2}{4+4}\cos 2t+\frac{2}{4+4}e^{-2t}\right)=4\sin 2t-4\cos 2t+4e^{-2t}$$

Az átviteli függvényt a súlyfüggvényből lehet meghatározni:

$$Y(s)=w(s)=16\frac{1}{2+s}$$

Ellenőrzésként állítsuk elő a rendszert leíró differenciálegyenletet, majd behelyettesítéssel győződjünk meg róla, hogy $v(t)$ tényleg megoldása.

$$\frac{v(s)}{u(s)}=\frac{16}{2+s}$$

$$s\cdot v(s)+2\cdot v(s)=16\cdot u(s)$$

$$\frac{dv}{dt}+2\cdot v(t)=16\cdot u(t)$$

Behelyettesítve:

$$8\cos 2t+8\sin 2t-8e^{-2t}+8\sin 2t-8\cos 2t+8e^{-2t}=16\sin 2t=16u(t)$$

2. Egy rendszer átmeneti függvénye: $v_a(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+\frac{1}{6}\cdot e^{-3t}$. Határozzuk meg $u(t)=\sin t$ esetén a rendszer válaszát, valamint az átviteli függvényt, a súlyfüggvényt és a rendszert leíró differenciálegyenletet.

a, Tetszőleges bemenethez meghatározható a kimenet a konvolúciós tétel felhasználásával, ha ismerjük a súlyfüggvényt. Most az átmeneti függvény adott, amelynek deriválásával azonban a súlyfüggvény előállítható:

$$\frac{dv_a}{dt}=w(t)=\frac{1}{2}\cdot e^{-t}-\frac{1}{2}\cdot e^{-3t}$$

Alkalmazzuk a konvolúciós tételt:

$$v(t)=\int_0^t w(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot\sin\tau-e^{-3(t-\tau)}\cdot\sin\tau\, d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot\sin\tau\, d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\cdot\sin\tau\, d\tau$$

A (29) összefüggés alapján a=α=1 és a=3, α=1 helyettesítéssel:

$$v(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\sin t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{10}e^{-3t}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{20}\right)\sin t-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)\cos t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{-3t}=\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{-3t}$$

b, Az átviteli függvény a súlyfüggvény Laplace transzformáltja, így:

$$Y(s)=w(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+s-1-s}{(1+s)(3+s)}=\frac{1}{(1+s)(3+s)}$$

c, A súlyfüggvényt már meghatároztuk: $w(t)=\frac{1}{2}\cdot e^{-t}-\frac{1}{2}\cdot e^{-3t}$

d, A differenciálegyenletet az átviteli függvényből kaphatjuk:

$$Y(s)=\frac{v(s)}{u(s)}=\frac{1}{(1+s)(3+s)}=\frac{1}{3+4s+s^2}$$

$$s^2\cdot v(s)+4s\cdot v(s)+3\cdot v(s)=u(s)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+4\frac{dv}{dt}+3\cdot v(t)=u(t)$$

Ellenőrzés: ha a, megoldást a differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítjük, akkor sin$t$-t kell kapni eredményül:

$$v(t)=\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{-3t}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{20}e^{-3t}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-\frac{1}{10}\sin t+\frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{9}{20}e^{-3t}$$

$$\left(-\frac{1}{10}+\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)\sin t+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{10}-\frac{3}{5}\right)\cos t+\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\right)e^{-t}+\left(-\frac{9}{20}+\frac{10}{20}-\frac{3}{20}\right)e^{-3t}=$$

$$=\frac{10}{10}\sin t+0\cdot\cos t+0\cdot e^{-t}+0\cdot e^{-3t}=\sin t$$

3. Egy rendszer átmeneti függvénye: $v_a(t)=e^{-2t}+2t-1$. Határozzuk meg $u(t)=\sin 2t$ esetén a rendszer válaszát, valamint az átviteli függvényt, a súlyfüggvényt és a rendszert leíró differenciál-egyenletet.

a, Tetszőleges bemenethez meghatározható a kimenet a konvolúciós tétel felhasználásával, ha ismerjük a súlyfüggvényt. Most az átmeneti függvény adott, amelynek deriválásával azonban a súly-függvény előállítható:

$$\frac{dv_a}{dt}=w(t)=-2\cdot e^{-2t}+2$$

Alkalmazzuk a konvolúciós tételt:

$$v(t)=\int_0^t w(t-\tau)\cdot u(\tau)d\tau=\int_0^t\left(2-2\cdot e^{-2t}\right)\cdot\sin 2\tau\, d\tau=$$

$$=2\int_0^t\sin 2\tau\, d\tau-2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot\sin 2\tau\, d\tau=2\left[-\frac{\cos 2\tau}{2}\right]_0^t-2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot\sin 2\tau\, d\tau=$$

$$=-\cos 2t+1-2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot\sin 2\tau\, d\tau$$

A (29) összefüggés alapján a=α=2 helyettesítéssel:

$$v(t)=1-\cos 2t-2\left(\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}e^{-2t}\right)=1-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}$$

b, Az átviteli függvény a súlyfüggvény Laplace transzformáltja, így:

$$Y(s)=w(s)=-2\cdot\frac{1}{2+s}+\frac{2}{s}=2\cdot\frac{2+s-s}{s(2+s)}=\frac{4}{s(2+s)}$$

c, A súlyfüggvényt már meghatároztuk: $w(t)=-2\cdot e^{-2t}+2$

d, A differenciálegyenletet az átviteli függvényből kaphatjuk:

$$Y(s)=\frac{v(s)}{u(s)}=\frac{4}{s(2+s)}=\frac{1}{2s+s^2}$$

$$s^2\cdot v(s)+2s\cdot v(s)=4\cdot u(s)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}=4\cdot u(t)$$

Ellenőrzés: ha a, megoldást a differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítjük, akkor $4\cdot\sin 2t$ -t kell kapni eredményül:

$$v(t)=1-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\cos 2t+\sin 2t+e^{-2t}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=2\sin 2t+2\cos 2t-2e^{-2t}$$

$$(2+2)\sin 2t+(2-2)\cos 2t+(-2+2)e^{-2t}=4\sin 2t=4u(t)$$

Tartalomjegyzék