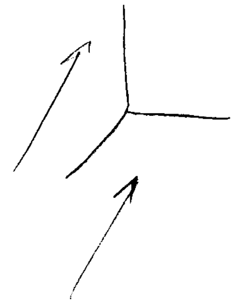
# Vektorok

nagyság + irány $|\vec{a}|$

két vektor egyenlő, ha nagyságuk megegyezik és párhuzamosak

egységvektorok $\underline{a}^\circ = \vec{a}/|\vec{a}|$ , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

M pont helyvektora



## Lineáris kombináció

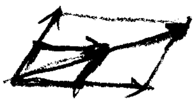
Összeg - parallelogramma szabály

Különbség

Skalárral való szorzás

Általánosan: $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ is vektor

Felbontás: komponensek, együtthatók

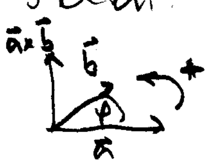


Koordináták - derékszögű

## Szorzás

$|\vec{a}\vec{b}| = ab \cdot \cos\varphi$ skalár

$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab \sin\varphi$




## Tulajdonságok:

- kommutativitás: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ , $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
- asszociativitás: sk: $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$ , $\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b}$

  v: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ , $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$
- disztributivitás: $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ , $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

$\vec{a}\vec{b} = 0$ , ha $\vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{b} = 0$ , ha $\vec{a}\parallel\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$

$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

## Derékszögű koordinátarendszerben: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

## Vektor-skalár függvény

$$\vec{a} = \vec{f}(t)$$

$$\left| \begin{array}{l} a_x = f_x(t) \\ a_y = f_y(t) \\ a_z = f_z(t) \end{array} \right.$$

$t$ változásával $\vec{f}(t)$ helyvektor térgörbét ír le

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$$

ez is vektorfgv.

a fenti térgörbe érintő irányába mutat

**Diff. szabályok:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\vec{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{a} + \varphi\frac{d\vec{a}}{dt} \qquad \varphi = \varphi(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad \text{sorrend!}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{a}(\varphi(t)) = \frac{d\vec{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Linde-féle levegő cseppfolyósítás

# Térelmélet

**Skalártér** (pontfüggvény, skalármező, skalár tér)

$U = U(\vec{r})$ skalár-vektor fgv.

Centrális fgv., ha $\forall$ olyan pontban, amely egy C centrumtól ugyanakkora távolságra van egyforma

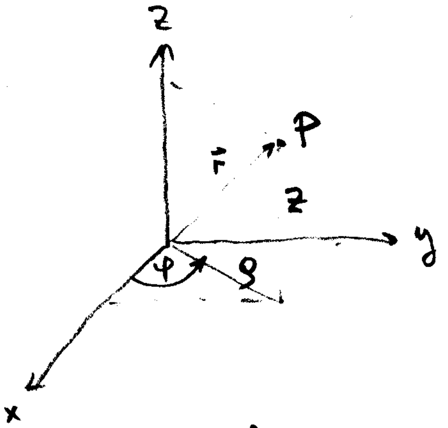
$U = U(r)$ (gravitáció, Coulomb, LJ)

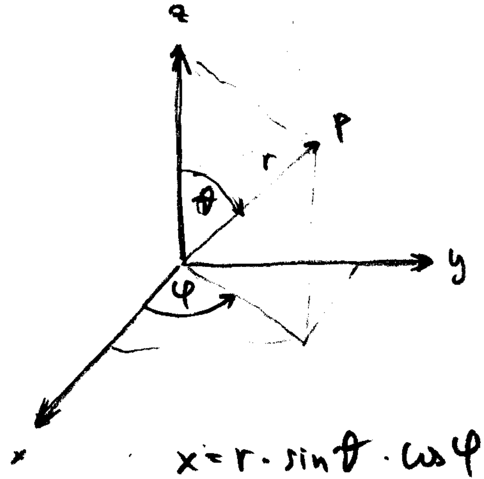
**Kifejezhető**

derékszögű $\boxed{U = U(x, y, z)}$  $F(T, V)$

henger $U = U(\varrho, \varphi, z)$

gömbi (szférikus) $U = U(r, \vartheta, \varphi)$ koordinátarendszer 670




$$x = \varrho \cdot \cos\varphi$$
$$y = \varrho \cdot \sin\varphi$$
$$z = z$$

---

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$$
$$z = r \cdot \cos\vartheta$$

---

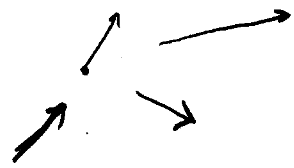
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$
$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

## Vektortér

$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ sebesség, erőtér, el., mágn., áramlás

$\vec{r} \longmapsto \vec{v}$

a) centrális vektortér: $\vec{v} = \varphi(\vec{r})\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$



b) Szferikus vt. $\vec{v} = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$ Newton - Coulomb: $\vec{v} = \frac{c}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

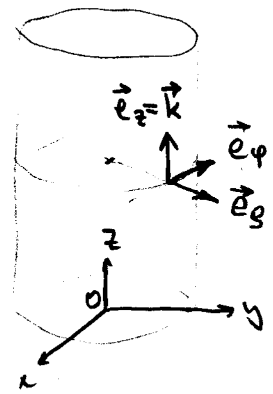
## Koordinátás előállítás:

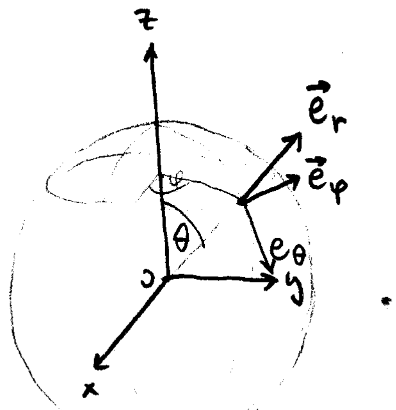
Derékszögű koordinátarn.:

$$\vec{v} = v_x(x,y,z)\,\vec{i} + v_y(x,y,z)\,\vec{j} + v_z(x,y,z)\,\vec{k}$$

$v_x, v_y, v_z$ 3 skalártér

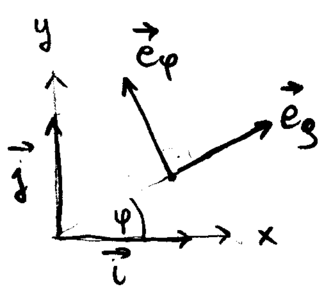
Hengerkoordinátarn.




$$\vec{v} = v_\varrho(\varrho,\varphi,z)\,\vec{e}_\varrho + v_\varphi(\varrho,\varphi,z)\,\vec{e}_\varphi + v_z(\varrho,\varphi,z)\,\vec{e}_z$$

A többi 674. o.



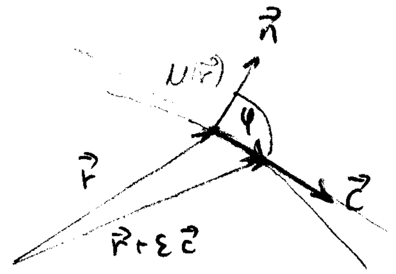

$$\left.\begin{aligned}
\vec{e}_\varrho &= \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j} \\
\vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j} \\
\vec{e}_z &= \vec{k}
\end{aligned}\right\}$$

$$\vec{v} = v_\varrho(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + v_\varphi\cdot(-\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) + v_z\cdot\vec{k} =$$

$$= \underbrace{(v_\varrho\cdot\cos\varphi - v_\varphi\cdot\sin\varphi)}_{v_x}\,\vec{i} + \underbrace{(v_\varrho\cdot\sin\varphi + v_\varphi\cdot\cos\varphi)}_{v_y}\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

# Gradiens

Adott $\vec{c}$ vektor szerinti diff.h.

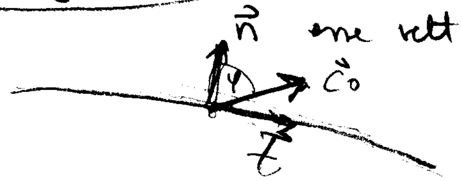



$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{c}}\right|_{\vec{r}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(\vec{r}+\varepsilon\vec{c})-u(\vec{r})}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{c}} = |\vec{c}|\cdot\frac{\partial u}{\partial \vec{c}^0}$$ $\vec{c}^0$ irányba történő növekedési seb.

Nívófelület: amelyen $u = \text{const.}$

$\vec{n}$ erre vett normális (normálvektor)




$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ maximális

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{c}^0} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\cdot(\vec{n}^0\cdot\vec{c}^0)}_{\nabla u} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\cdot\cos\varphi$$

$$u = u(x,y,z)$$

## Gradiens

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z = \quad \text{henger}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

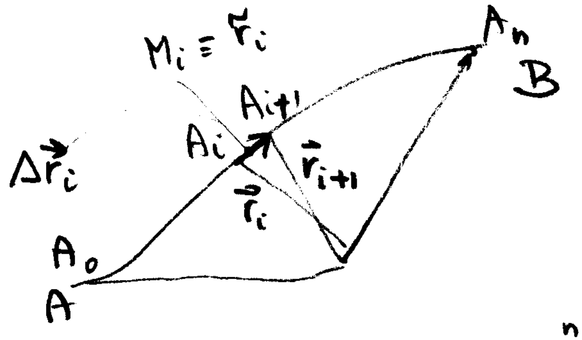
Teljes differenciál: $du = \nabla u\cdot d\vec{r} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

Szabályok: hasonlóak

Centrális tér gradiense szferikus koordinátákban:

$u(\vec{r}) = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$ $\qquad \nabla u = \qquad \nabla u =$

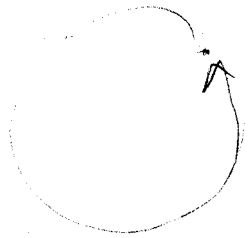
## Vonalintegrál: $\widehat{AB}$ íven vett




$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}(\vec{r})\, d\vec{r} = \lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{V}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

Ha $\vec{v}$ erőtér akkor $\int \vec{v}\, d\vec{r}$ az AB úton végzett munka

## Kiszámítása:



$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} v_x\, dx + \int_{y_A}^{y_B} v_y\, dy + \int_{z_A}^{z_B} v_z\, dz$$

## Vektortér cirkulációja: $\oint_c \vec{v}\, d\vec{r}$ c zárt görbe

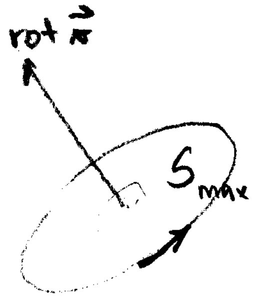
## Konzervatív tér: (potenciállal bíró tér)

$\int_{\widehat{AB}} \vec{v}\, d\vec{r}$ csak az A kezdő és B végpontból függ, úttól nem

## Vektortér rotációja: rot $\vec{v}$, curl $\vec{v}$, $\nabla\times\vec{v}$

Egy definíció:

$$|\mathrm{rot}\,\vec{v}| = \lim_{S\to 0} \frac{\int_{c_{max}} \vec{v}\, d\vec{r}}{S_{max}}$$




$S_{max}$: azon $S$, amire $\oint \vec{v}\, d\vec{r}$ maximális

## Rotáció koordinátás kifejezése

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Hasonlóan, mint a gradiens esetében, kifejezhető henger és gömbkoordinátákkal.

$\vec{v}$ vektortér konzervatív $\iff$ $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \emptyset$

másodrendű vegyes parciális deriváltak egyenlőek

Konzervatív tér potenciálja:

A rögzített : $\vec{r}_0$ $\qquad U = E \cdot d$

B = $\vec{r}$ változó

$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{V}(r)\, d\vec{r}$ skalártér, potenciál, határozatlan $\vec{r}_0$-tól függ

$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r}$ határozott

Ha $\vec{v}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, u(\vec{r})$, akkor $u$ a $\vec{v}$ potenciálja

Meghatározása:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= v_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= v_z \end{aligned}\right\} \text{ diff.-e. rendszerből}$$

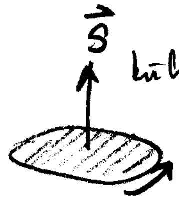
$\boxed{\text{vagy}}$

törtvonal menti integrálból

$$u = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{v}\, d\vec{r} = u(x_0, y_0, z_0) +$$

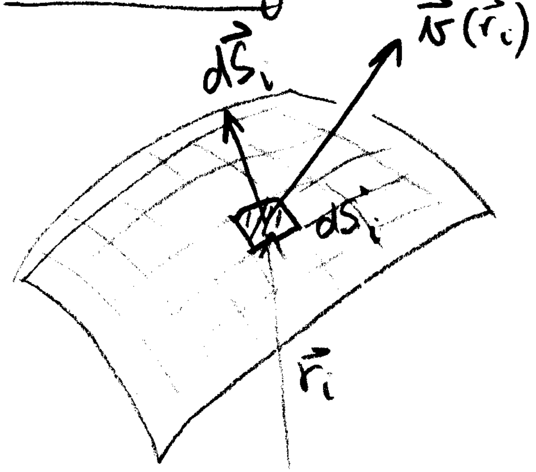
$$+ \int_{x_0}^{x} v_x(x, y_0, z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} v_y(x, y, z_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} v_z(x, y, z)\, dz$$

# Felületi integrálok




$\Sigma$ síkidom területvektora

## Ökölszabály:




## Skalártér fluxusa:

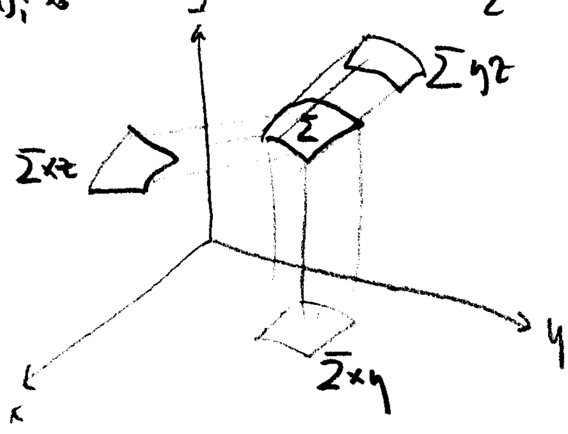
$$\lim_{dS_i\to 0}\sum_i u(\vec{r}_i)\, d\vec{S}_i = \int_\Sigma u(\vec{r})\, d\vec{S} = \iint u\, dy\, dz \cdot \vec{i} + \iint u\, dz\, dx\, \vec{j} + \iint u\, dy\, dx\, \vec{k}$$

## Vektortér skaláris fluxusa:

$$\lim_{dS_i\to 0}\sum_i \vec{v}(\vec{r}_i)\, d\vec{S}_i = \int_\Sigma \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r} = \iint_{\Sigma_{yz}} v_x\, dy\, dz + \iint_{\Sigma_{xz}} v_y\, dx\, dz + \iint_{\Sigma_{xy}} v_z\, dx\, dy$$

## Vektortér vektoriális fluxusa

$$\lim_{dS_i\to 0}\sum_i \vec{v}(\vec{r}_i)\times d\vec{S}_i = \int_\Sigma \vec{v}(\vec{r})\times d\vec{S}_i$$



# Térfogati differenciálhányados


$\Sigma$ zárt felület

Erre vesszük:

$$\oint_\Sigma u\, d\vec{S}, \quad \oint_\Sigma \vec{v}\, d\vec{S} \quad \text{vagy} \quad \oint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{S}$$

Majd: $V \to 0$

**Gradiens**: $$\operatorname{grad} u = \lim_{V \to 0} \frac{\oint u\, d\vec{S}}{V}$$

**Rotáció**: $$\operatorname{rot} \vec{v} = -\lim_{V \to 0} \frac{\oint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{S}}{V}$$

**Divergencia**: $$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_\Sigma \vec{v}\, d\vec{S}}{V}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

**Nabla operátor**: $$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}}$$

Laplace operátor:

$$\Delta u = \nabla \nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

div grad $u$